

Correction du TD 27

Table des matières

1	Exercice 6	2
2	Exercice 7	2
3	Exercice 10	4
4	Exercice 11	5
5	Exercice 12	6

1 Exercice 6

Commençons par déterminer la loi de M . On a $M(\Omega) = \{0, 1\}$, on cherche ensuite à déterminer $P(M \leq k)$ pour tout $k \in \mathbb{R}$.

- soit $k < 0$ alors $P(M \leq k) = 0$
- soit $k \in [0, 1]$, $P(M \leq k) = P((X \leq k) \cap (Y \leq k)) = P(X \leq k)P(Y \leq k)$ par indépendance des variables X et Y . On a donc :

$$P(M \leq k) = P(X = 0)P(Y = 0) = (1 - p)(1 - p').$$

- soit $k \geq 1$, $P(M \leq k) = 1$.

On peut alors en déduire la loi de M ,

$$P(M = 1) = P(M \leq 1) - P(M \leq 0) = 1 - (1 - p)(1 - p')$$

et

$$P(M = 0) = P(M \leq 0) - P(M \leq -1) = (1 - p)(1 - p') - 0 = (1 - p)(1 - p').$$

Déterminons ensuite la loi de m . On a $m(\Omega) = \{0, 1\}$, on cherche ensuite à déterminer $P(m > k)$ pour tout $k \in \mathbb{R}$.

- soit $k < 0$ alors $P(m > k) = 1$
- soit $k \in [0, 1]$, $P(m > k) = P((X > k) \cap (Y > k)) = P(X > k)P(Y > k)$ par indépendance des variables X et Y . On a donc :

$$P(m > k) = P(X = 1)P(Y = 1) = pp'.$$

- soit $k \geq 1$, $P(m > k) = 0$.

On peut alors en déduire la loi de m ,

$$P(m = 1) = P(m \leq 1) - P(m \leq 0) = 1 - P(m > 1) - (1 - P(m > 0)) = P(m > 0) - P(m > 1) = pp'$$

et

$$P(m = 0) = P(m \leq 0) - P(m \leq -1) = P(m > -1) - P(m > 0) = 1 - pp'.$$

Déterminons ensuite la loi de R . On a $R(\Omega) = \{0, 1\}$. On a alors :

$$\begin{aligned} P(R = 0) &= P(XY = 0) = P([X = 0] \cap [Y = 0] \cup [X = 0] \cap [Y = 1] \cup [X = 1] \cap [Y = 0]) \\ &= P([X = 0] \cap [Y = 0]) + P([X = 0] \cap [Y = 1]) + P([X = 1] \cap [Y = 0]) \quad \text{car les événements sont incompatibles} \\ &= P(X = 0)P(Y = 0) + P(X = 0)P(Y = 1) + P(X = 1)P(Y = 0) \quad \text{car les variables aléatoires sont indépendantes} \\ &= (1 - p)(1 - p') + (1 - p)p' + p(1 - p') \\ &= 1 - p - p' + pp' + p' - pp' + p - pp' \\ &= 1 - pp' \end{aligned}$$

Comme $P(R = 0) + P(R = 1) = 1$, on en déduit que $P(R = 1) = 1 - (1 - pp') = pp'$.

Il reste à déterminer la loi de S . On a $S(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. Comme $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{0, 1\}$, on a :

$$P(S = 0) = P(X + Y = 0) = P([X = 0] \cap [Y = 0]) = (1 - p)(1 - p').$$

On a aussi :

$$P(S = 2) = P(X + Y = 2) = P([X = 1] \cap [Y = 1]) = pp'.$$

Or $P(S = 0) + P(S = 1) + P(S = 2) = 1$ donc :

$$P(S = 1) = 1 - pp' - (1 - p)(1 - p') = 1 - pp' - 1 + p + p' - pp' = p + p' - 2pp'$$

2 Exercice 7

1. Chaque urne contient n boules identiques numérotées de 1 à n , le tirage d'une boule est donc équiprobable. Ainsi, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.

Pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$P(X_i \leq k) = \sum_{j=1}^k P(X_i = j) = \sum_{j=1}^k \frac{1}{n} = \frac{k}{n}.$$

2. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$\begin{aligned}
 P(Y \leq k) &= P\left(\bigcap_{i=1}^p [X_i \leq k]\right) \\
 &= \prod_{i=1}^p P(X_i \leq k) \quad \text{car les variables aléatoires sont indépendantes puisque les tirages sont indépendants} \\
 &= \prod_{i=1}^p \frac{k}{n} \\
 &= \left(\frac{k}{n}\right)^p.
 \end{aligned}$$

On peut ensuite en déduire la loi de Y . On a $Y(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$. On remarque que $P(Y = 1) = P(Y \leq 1) = \left(\frac{1}{n}\right)^p$. Puis pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, on a :

$$\begin{aligned}
 P(Y = k) &= P(Y \leq k) - P(Y \leq k-1) \\
 &= \left(\frac{k}{n}\right)^p - \left(\frac{k-1}{n}\right)^p.
 \end{aligned}$$

On remarque que finalement pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$P(Y = k) = \left(\frac{k}{n}\right)^p - \left(\frac{k-1}{n}\right)^p.$$

3. La variable aléatoire Y est finie donc elle admet une espérance. On a :

$$\begin{aligned}
 E(Y) &= \sum_{k=1}^n k P(Y = k) \\
 &= \sum_{k=1}^n k \left(\left(\frac{k}{n}\right)^p - \left(\frac{k-1}{n}\right)^p \right) \\
 &= \sum_{k=1}^n k \left(\frac{k}{n}\right)^p - \sum_{k=1}^n k \left(\frac{k-1}{n}\right)^p \\
 &= \sum_{k=1}^n k \left(\frac{k}{n}\right)^p - \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) \left(\frac{j}{n}\right)^p \quad \text{en posant } j = k-1 \text{ dans la deuxième somme} \\
 &= n + \sum_{k=1}^{n-1} k \left(\frac{k}{n}\right)^p - \sum_{k=1}^{n-1} j \left(\frac{j}{n}\right)^p - \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{j}{n}\right)^p \\
 &= n - \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{j}{n}\right)^p
 \end{aligned}$$

Si $p = 2$, on a :

$$\begin{aligned}
 E(Y) &= n - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \\
 &= n - \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \\
 &= n - \frac{1}{n^2} \times \frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6} \\
 &= n - \frac{(n-1)(2n-1)}{6n} \\
 &= \frac{6n^2 - 2n^2 + n + 2n - 1}{6n} \\
 &= \frac{4n^2 + 3n - 1}{6n}
 \end{aligned}$$

4. Soit $\omega \in \Omega$, si $X_1(\omega) \leq X_2(\omega)$ on a :

$$Y(\omega) + Z(\omega) = X_2(\omega) + X_1(\omega).$$

Si $X_1(\omega) \geq X_2(\omega)$ on a :

$$Y(\omega) + Z(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega).$$

Dans tous les cas :

$$Y(\omega) + Z(\omega) = X_2(\omega) + X_1(\omega).$$

Ainsi $Y + Z = X_1 + X_2$.

Par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(Z) = E(X_1 + X_2 - Y) = E(X_1) + E(X_2) - E(Y) = \frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{2} - \frac{4n^2 + 3n - 1}{6n} = \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n}.$$

3 Exercice 10

1. On cherche $q \in]0, 1[$ tel que : $\sum_{i=1}^2 \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=i, Y=k) = 1$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=i, Y=k) &= \sum_{i=1}^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{q^k}{2i} \\ &= \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{+\infty} q^k \\ &= \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2i} \frac{1}{1-q} \quad \text{car la série converge puisque } q \in]0, 1[\\ &= \frac{1}{1-q} \left(\sum_{i=1}^2 \frac{1}{2i} \right) \\ &= \frac{1}{1-q} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{3}{4} \times \frac{1}{1-q} \end{aligned}$$

Il reste donc à trouver $q \in]0, 1[$ tel que :

$$\frac{3}{4} \times \frac{1}{1-q} = 1$$

i.e $q = \frac{1}{4}$.

2. Déterminons la première loi marginale, on a : $X(\Omega) = \{1, 2\}$, ainsi :

$$\begin{aligned} P(X=1) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=1, Y=k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{q^k}{2} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-q} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

On a ensuite $P(X=2) = 1 - P(X=1) = \frac{1}{3}$.

On peut alors facilement calculer l'espérance de X (qui existe bien car X est une variable aléatoire finie) :

$$E(X) = 1 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

Déterminons la deuxième loi marginale, on a : $Y(\Omega) = \mathbb{N}$, ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$P(Y=k) = \sum_{i=1}^2 P(X=i, Y=k) = \frac{q^k}{2} + \frac{q^k}{4} = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4} \right)^k.$$

3. Posons $Y' = Y + 1$, on a $Y'(\Omega) = \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$P(Y' = k) = P(Y + 1 = k) = P(Y = k - 1) = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}.$$

Ainsi $Y' \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{3}{4}\right)$. On sait donc que Y' admet une espérance et que $E(Y') = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$. Ainsi par linéarité de l'espérance, on en déduit que Y admet une espérance et qu'elle vaut :

$$E(Y) = E(Y' - 1) = E(Y') - 1 = \frac{1}{3}.$$

4. Soit $(i, k) \in \{1, 2\} \times \mathbb{N}$, on a :

$$P(X = i)P(Y = k) = \frac{2}{3i} \times \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{4}\right)^k = P(X = i, Y = k).$$

Les variables aléatoires X et Y sont donc indépendantes.

5. Comme X et Y sont donc indépendantes, on a :

$$E(Z) = E(X)E(Y) = \frac{4}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}.$$

Comme X et Y sont donc indépendantes, d'après le lemme des coalitions Y et $\frac{1}{X}$ sont aussi indépendantes, on a donc :

$$E(T) = E(Y)E\left(\frac{1}{X}\right).$$

Pour calculer, $E\left(\frac{1}{X}\right)$, utilisons le théorème de transfert, on a :

$$E\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{1} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

Ainsi :

$$E(T) = E(Y)E\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{18}.$$

6. On a $Z(\Omega) = \mathbb{N}$, pour $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= P(XY = k) \\ &= P(X = 1, Y = k) + P(X = 2, Y = \frac{k}{2}) \\ &= \frac{q^k}{2} + \frac{q^{\frac{k}{2}}}{4} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^k + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^{k/2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^k + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^k \end{aligned}$$

4 Exercice 11

- Supposons l'événement $[N = j]$ réalisé, on appelle succès l'événement : « la personne vient poster un envoi » de probabilité p . On répète j fois de manière identique et indépendante l'épreuve de Bernoulli associée et la variable aléatoire X sachant $[N = j]$ compte le nombre de succès. Ainsi la loi de X sachant l'événement $[N = j]$ réalisé est $\mathcal{B}(j, p)$.
- Déterminons la loi de (X, N) . On a $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $N(\Omega) = \mathbb{N}$. On a pour tout $(k, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, d'après la formule des probabilités composées :

$$P(X = k, N = j) = P(N = j)P_{[N=j]}(X = k).$$

Or pour $k > j$, $P_{[N=j]}(X = k) = 0$ et pour $k \leq j$, on a : $P_{[N=j]}(X = k) = \binom{j}{k} p^k (1-p)^{j-k}$ d'après la question précédente. Ainsi :

- pour $k > j$, $P(X = k, N = j) = 0$
- pour $k \leq j$, $P(X = k, N = j) = \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} \binom{j}{k} p^k (1-p)^{j-k}$

3. Soit $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
 P(X = k) &= \sum_{j=0}^{+\infty} P(X = k, N = j) \\
 &= \sum_{j=0}^{+\infty} P(N = j) P_{[N=j]}(X = k) \\
 &= \sum_{j=0}^{k-1} P(N = j) P_{[N=j]}(X = k) + \sum_{j=k}^{+\infty} P(N = j) P_{[N=j]}(X = k) \\
 &= \sum_{j=0}^{k-1} P(N = j) \times 0 + \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} \times \binom{j}{k} p^k (1-p)^{j-k} \\
 &= e^{-\lambda} \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \times \frac{j!}{k!(j-k)!} p^k (1-p)^{j-k} \\
 &= \frac{e^{-\lambda} p^k}{k!} \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{\lambda^j (1-p)^{j-k}}{(j-k)!} \\
 &= \frac{e^{-\lambda} p^k}{k!} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{i+k} (1-p)^i}{i!} \quad \text{en posant } i = j - k \\
 &= \frac{e^{-\lambda} (\lambda p)^k}{k!} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^i}{i!} \\
 &= \frac{e^{-\lambda} (\lambda p)^k}{k!} e^{\lambda(1-p)} \\
 &= \frac{e^{-\lambda p} (\lambda p)^k}{k!}
 \end{aligned}$$

Ainsi $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p)$. Comme X suit une loi de Poisson, on sait qu'elle admet une espérance et que $E(X) = \frac{1}{\lambda p}$.

4. Supposons l'événement $[N = j]$ réalisé, on appelle succès l'événement : « la personne vient poster une autre opération » de probabilité q . On répète j fois de manière identique et indépendante l'épreuve de Bernoulli associée et la variable aléatoire Y sachant $[N = j]$ compte le nombre de succès. Ainsi la loi de Y sachant l'événement $[N = j]$ réalisé est $\mathcal{B}(j, q)$.

On peut alors suivre le raisonnement réaliser pour déterminer la loi de X et faire exactement le même calcul (en remplaçant p par q) et on obtient : $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda q)$.

5. Intuitivement, les variables aléatoires X et Y ne semblent pas indépendantes et pourtant on a pour tout $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
 P(X = i, Y = j) &= P(X = i, N = i + j) \\
 &= \frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!} e^{-\lambda} \binom{i+j}{i} p^i (1-p)^j \\
 &= \frac{(\lambda p)^i (\lambda(1-p))^j e^{-\lambda p} e^{-\lambda(1-p)}}{i! j!} \\
 &= \frac{(\lambda p)^i e^{-\lambda p}}{i!} \times \frac{(\lambda(1-p))^j e^{-\lambda(1-p)}}{j!} \\
 &= P(X = i) P(Y = j)
 \end{aligned}$$

Les variables aléatoires X et Y sont donc indépendantes.

5 Exercice 12

1. Comme X et Y suivent des lois géométriques, on a : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Ainsi $(X + Y)(\Omega) = \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ on a :

$$\begin{aligned}
 P(X + Y = n) &= P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} [X = k] \cap [Y = n - k]\right) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} P([X = k] \cap [Y = n - k]) \quad \text{car les événements sont deux à deux incompatibles} \\
 &= \sum_{k=1}^{n-1} P([X = k] \cap [Y = n - k]) \quad \text{car } Y(\Omega) = \mathbb{N}^* \\
 &= \sum_{k=1}^{n-1} P(X = k)P(Y = n - k) \quad \text{car les variables aléatoires sont indépendantes} \\
 &= \sum_{k=1}^{n-1} a(1-a)^{k-1} \times a(1-a)^{n-k-1} \\
 &= a^2 \sum_{k=1}^{n-1} (1-a)^{n-2} \\
 &= (n-1)a^2(1-a)^{n-2}
 \end{aligned}$$

Déterminons maintenant la loi de X sachant l'événement $[X + Y = n]$ réalisé pour un entier $n \geq 2$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on remarque dans un premier temps que :

$$P_{[X+Y=n]}(X = k) = 0 \text{ pour } k \geq n.$$

Ainsi, on a dans un second temps pour $k < n$:

$$\begin{aligned}
 P_{[X+Y=n]}(X = k) &= \frac{P([X + Y = n] \cap [X = k])}{P(X + Y = n)} \\
 &= \frac{P([X = k] \cap [Y = n - k])}{P(X + Y = n)} \\
 &= \frac{P(X = k)P(Y = n - k)}{P(X + Y = n)} \quad \text{car les variables aléatoires sont indépendantes} \\
 &= \frac{a(1-a)^{k-1}a(1-a)^{n-k-1}}{(n-1)a^2(1-a)^{n-2}} \\
 &= \frac{1}{n-1}
 \end{aligned}$$

Ainsi la loi de X sachant $[X + Y = n]$ est la loi uniforme sur $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

2. Le calcul est le même au début qu'à la première question, on a : $(X + Y)(\Omega) = \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ on a :

$$\begin{aligned} P(X + Y = n) &= P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} [X = k] \cap [Y = n - k]\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} P(X = k)P(Y = n - k) \quad \text{car les variables aléatoires sont indépendantes} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} a(1-a)^{k-1} \times b(1-b)^{n-k-1} \\ &= ab \sum_{k=1}^{n-1} (1-a)^{k-1} (1-b)^{n-k-1} \\ &= ab(1-a)^{-1} (1-b)^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1-a}{1-b}\right)^k \\ &= ab(1-a)^{-1} (1-b)^{n-1} \frac{1-a}{1-b} \times \frac{1 - \left(\frac{1-a}{1-b}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1-a}{1-b}} \\ &= \frac{ab(1-b)^{n-1}}{a-b} \left(1 - \left(\frac{1-a}{1-b}\right)^{n-1}\right) \end{aligned}$$