Couples de variables aléatoires discrètes

Exercice 1 (♣)

Un sac contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On effectue deux tirages successifs d'une boule, avec remise. On note X_1 le numéro de la première boule, X_2 le numéro de la deuxième boule et Y le plus petit des deux numéros obtenus.

1. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2).
2. (a) Déterminer la loi du couple (X_1, Y).
   (b) En déduire la loi de Y.
   (c) Peut-on obtenir la loi de X_1 de façon analogue ?

Exercice 2 (♣)

On lance un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note X le numéro obtenu. On choisit alors au hasard avec équiprobabilité un entier Y compris entre 1 et X.

1. Donner la loi de X.
2. Pour tout $x \in X(\Omega)$, donner la loi de Y sachant $[X = x]$.
3. Déterminer la loi du couple (X, Y).
4. En déduire la loi de Y et retrouver la loi de X.

Exercice 3 (♣)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi uniforme sur $[\![1, 10]\!]$.

1. Déterminer la probabilité que la valeur prise par X soit supérieure ou égale à 7.
2. Déterminer la probabilité pour que la valeur prise par X soit paire.
3. Déterminer la probabilité pour que les valeurs prises par X et Y soient égales.
4. Déterminer la probabilité pour que la valeur prise par X soit inférieure ou égale à la valeur prise par Y.

Exercice 4 (♣)

Une urne contient une boule rouge et deux boules blanches. Un joueur effectue trois tirages successifs d'une boule dans cette urne. Il remet la boule obtenue dans l'urne après chaque tirage.
À partir du deuxième tirage, le joueur reçoit un point à chaque fois que la couleur obtenue à un tirage n'est pas celle qui a été obtenue au tirage précédent. Dans le cas contraire, il ne reçoit aucun point.
Ainsi, si les trois tirages successifs amènent : blanc, rouge, rouge, le joueur marque un point au deuxième tirage et aucun au troisième tirage.
On introduit, pour tout entier k compris entre 1 et 3, les évènements B_k : "obtenir une boule blanche au k-ième tirage" et R_k : "obtenir une boule rouge au k-ième tirage".

1. Soit X_2 la variable aléatoire de Bernoulli égale au gain du joueur lors du deuxième tirage. C'est-à-dire que X_2 est égale à 1 si le joueur marque un point lors du deuxième tirage et que X_2 est égale à 0 sinon.
   (a) Justifier que $[X_2 = 1] = (B_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap B_2)$. Calculer $P(X_2 = 1)$.
   (b) Donner $E(X_2)$ et $V(X_2)$.
2. Soit X_3 la variable aléatoire de Bernoulli égale au gain du joueur lors du troisième tirage.
   (a) Justifier que X_3 suit la même loi que X_2.
   (b) Soit G la variable aléatoire égale au nombre total de points marqués lors des trois tirages. Exprimer G en fonction de X_2 et X_3. En déduire $E(G)$.
3. (a) Exprimer l'évènement $[X_2 = 1] \cap [X_3 = 1]$ en fonction de B_1, B_2 B_3 et R_1, R_2, R_3. En déduire que
$$P([X_2 = 1] \cap [X_3 = 1]) = \frac{2}{9}.$$
   (b) Compléter de la même manière le tableau suivant donnant la loi conjointe du couple (X_2, X_3).

	$X_3 = 0$	$X_3 = 1$
$X_2 = 0$		
$X_2 = 1$		

Exercice 5 (♣)

On considère n boîtes numérotées de 1 à n (avec $n \geqslant 2$). La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une boîte puis dans cette boîte une boule. Soit X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $P(X = Y)$ en fonction de la somme
$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$
4. Déterminer la loi de Y et l'espérance de Y.

Exercice 6 (♥)

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(p')$.
Déterminer la loi des variables aléatoires $M = \max(X, Y)$, $m = \min(X, Y)$, $R = XY$ et $S = X + Y$.

Exercice 7 (♥)

On considère p urnes numérotées de 1 à p contenant chacune n boules numérotées de 1 à n. On extrait une boule de chaque urne et on note X_i le numéro de la boule tirée de l'urne numérotée i. On pose $Y = \max_{i \in [1,p]} (X_i)$.

1. Déterminer la loi de X_i et calculer, pour tout entier k de $[\![1, n]\!], P(X_i \leqslant k)$.
2. Calculer, pour tout entier k de $[\![1, n]\!], P(Y \leqslant k)$. En déduire la loi de Y.
3. Montrer que $E(Y) = n - \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p$. Simplifier cette expression dans le cas où $p = 2$.

4. On suppose dans cette question que $p = 2$. On pose $Z = \min(X_1, X_2)$. Montrer que $Y + Z = X_1 + X_2$. En déduire l'expression de $E(Z)$.

Exercice 8 (♣)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p.
X a-t-elle plus de chances de prendre une valeur paire ou une valeur impaire ?

Exercice 9 (♣)

On tire simultanément trois boules dans une urne en contenant 5 numérotées de 1 à 5.
On appelle X et Y les variables aléatoires respectivement égales au plus petit et au plus grand numéro tiré.

1. Déterminer la loi conjointe de X et Y.
2. En déduire les lois marginales. Calculer leur espérance.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer la loi de $Z = Y - X$. Calculer son espérance.

Exercice 10 (♥)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires tel que :

$$X(\Omega) = \{1, 2\}, \quad Y(\Omega) = \mathbb{N}$$

et

$$\forall (i, k) \in \{1, 2\} \times \mathbb{N}, \quad P(X = i, Y = k) = \frac{q^k}{2i}$$

1. En admettant que $0 < q < 1$, déterminer le réel q.
2. Déterminer les lois marginales. Calculer l'espérance de X.
3. Reconnaitre la loi de $Y' = Y + 1$. En déduire sans calcul que Y admet une espérance dont on précisera la valeur.
4. Montrer que X et Y sont indépendantes.
5. On pose $Z = XY$ et $T = Y/X$. Calculer $E(Z)$ et $E(T)$.
6. Déterminer la loi de Z.

Exercice 11 (♥)

Le nombre de personnes se présentant à un bureau de poste en une journée est une variable aléatoire N suivant une loi de Poisson de paramètre λ.
Une personne vient pour poster un envoi avec la probabilité $p (0 < p < 1)$, ou pour une autre opération (retrait d'argent, gestion d'un compte...) avec la probabilité $q = 1 - p$.
On suppose que chaque personne n'effectue qu'une opération et qu'elles effectuent ces opérations indépendamment les unes des autres.
On note X le nombre de personnes qui viennent poster un envoi et Y le nombre de personnes qui viennent pour une autre opération.

1. Pour tout entier j, déterminer la loi de X sachant que l'événement $[N = j]$ est réalisé.
2. Déterminer la loi du couple (X, N).
3. En déduire la loi de X et son espérance.
4. Déterminer la loi de Y.
5. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 12 (♥)

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(a)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(b)$.

1. On suppose que $a = b$. Déterminer la loi de $X + Y$, puis la loi de X sachant que l'événement $[X + Y = n]$ est réalisé.
2. On suppose que $a \neq b$. Déterminer la loi de $X + Y$.

♣ Du trêfle à brouter...
♥ À connaître par coeur.

♠ Qui s'y frotte s'y pique !
♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau !