Développements limités

Exercice 1 (♣)

Calculer les développements limités en 0 des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \dfrac{1}{3-2x}$ à l'ordre 3
2. $x \mapsto \sqrt{5-2x}$ à l'ordre 3
3. $x \mapsto (1+2x)^{\frac{1}{4}}$ à l'ordre 3
4. $x \mapsto e^{2x}\ln(1-x)$ à l'ordre 3
5. $x \mapsto \dfrac{\ln(1+2x)}{2+x}$ à l'ordre 3
6. $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}}{x^3}$ à l'ordre 4
7. $x \mapsto \sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$ à l'ordre 4
8. $x \mapsto \sqrt{4+x}$ à l'ordre 3

Exercice 2 (♣)

Calculer les développements limités en 0 à l'ordre 3 des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto e^{1+x^2}$
2. $x \mapsto \ln\left(3e^x+e^{-x}\right)$
3. $x \mapsto \dfrac{1}{1-\sin(x)}$
4. $x \mapsto \left(\dfrac{1}{1-2x}\right)^2$

Exercice 3 (♣)

Calculer les développements limités en x_0 à l'ordre 3 des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \ln(1+x)$ en $x_0 = 1$
2. $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ en $x_0 = 1$
3. $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$ en $x_0 = 1$

Exercice 4 (♣)

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)-x\cos(x)}{x(1-\cos(x))}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-e^x)(1-\cos(x))}{x^3+x^4}$

Exercice 5 (♦)

Soient a et b deux réels non nuls. On définit une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par

$$u_n = \left(1+\frac{a+b}{n}\right)^n - \left(1+\frac{a}{n}\right)^n\left(1+\frac{b}{n}\right)^n.$$

Déterminer un équivalent de u_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 6 (♣)

Étudier la convergence des séries de terme général

1. $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n}\right) + \ln\left(\dfrac{n-1}{n}\right)$
2. $v_n = \tan\left(\dfrac{1}{n}\right) + \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$

Exercice 7 (♣)

Soit la fonction f définie sur $]-1,1[$ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x}}{1+x}$. Etudier l'allure de la courbe au voisinage de 0.

Exercice 8 (♥)

Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n définie sur $]0,+\infty[$ par $f_n(x) = x\mathrm{e}^{-\frac{n}{x}}$ et on note $\mathcal{C}_n$ sa courbe représentative.

1. (a) Rappeler le développement limité à l'ordre 2 de e^u lorsque u est au voisinage de 0.

   (b) En déduire que, lorsque x est au voisinage de $+\infty$, on a :
   $$f_n(x) = x - n + \frac{n^2}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

2. (a) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}(f_n(x)-(x-n)) = 0$.

   (b) On note D_n la droite d'équation $y = x-n$.
   Que représente la droite D_n pour la courbe $\mathcal{C}_n$?
   Préciser la position relative de D_n et $\mathcal{C}_n$ au voisinage de $+\infty$.

♣ Du trêfle à brouter...
♥ À connaître par coeur.
♠ Qui s'y frotte s'y pique !
♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau !