

Correction des exercices du TD 25

Table des matières

1	Exercice 4	2
2	Exercice 5	2
3	Exercice 6	3
4	Exercice 7	4
5	Exercice 8	4
6	Exercice 12	5
7	Exercice 13	5

1 Exercice 4

1. Soient $(M_1, M_2) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(\lambda M_1 + M_2) = A(\lambda M_1 + M_2) = \lambda A M_1 + A M_2 = \lambda f(M_1) + f(M_2).$$

L'application f est donc bien linéaire.

2. Soit $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}) = (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Calculons les images des vecteurs de la base canonique, on a :

$$f(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -E_{1,1} + E_{2,1}$$

$$f(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -E_{1,2} + E_{2,2}$$

$$f(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2E_{1,1}$$

$$f(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2E_{1,2}$$

Ainsi la matrice de f dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 Exercice 5

1. Notons pour $i \in \{1, 2, 3\}$, $F_i = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f_i)$. On a directement $F_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a ensuite :

$$F_2 = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u(f_3)) - F_3.$$

Or $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u(f_3)) = M F_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $F_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. On a également :

$$F_1 = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u(f_2)) - F_2.$$

Or $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u(f_2)) = M F_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $F_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. On a $\text{card}(\mathcal{B}') = \dim(\mathbb{R}^3)$, il suffit donc de montrer que $\mathcal{B}'$ forme une famille libre pour montrer que c'est une base de $\mathbb{R}^3$. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$. On obtient alors le système :

$$\begin{cases} \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Commençons par échanger L_1 et L_3 , on obtient :

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Puis $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$:

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Puis $L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1$:

$$\begin{cases} \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & 2\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & & & & 3\lambda_3 & = & 0 \end{cases}$$

On obtient alors $\lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1 = 0$. La famille est donc libre et $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. (a) On a :

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \text{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) La matrice $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ est inversible car c'est une matrice de passage. On calcule son inverse avec la méthode de Gauss-Jordan (par exemple) et on obtient :

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(c) D'après le cours, on a :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}((1, 2, 3)) = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \text{mat}_{\mathcal{B}'}((1, 2, 3))$$

donc

$$\text{mat}_{\mathcal{B}'}((1, 2, 3)) = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}^{-1} \text{mat}_{\mathcal{B}}((1, 2, 3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

4. (a) Pour construire la matrice N , nous devons exprimer $u(f_1)$, $u(f_2)$ et $u(f_3)$ dans les bases f_1 , f_2 et f_3 . D'après l'énoncé, on a :

$$f_2 = u(f_3) - f_3 \quad \text{donc} \quad u(f_3) = f_2 + f_3$$

et

$$f_1 = u(f_2) - f_2 \quad \text{donc} \quad u(f_2) = f_1 + f_2.$$

De plus, pour calculer $u(f_1)$, il suffit de faire MF_1 . On effectue le calcul et on obtient $MF_1 = F_1$ donc $u(f_1) = f_1$. Ainsi on a :

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) On calcule le produit matriciel $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}^{-1} M P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ et on obtient N . (RDV en deuxième année !)

3 Exercice 6

1. Notons $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$. La matrice C qui représente l'endomorphisme Φ dans la base canonique nous permet d'affirmer que :

$$\Phi(1) = 3 + 3x - 2x^2, \quad \Phi(x) = -2 - 3x + 5x^2, \quad \Phi(x^2) = -1 - x + x^2.$$

Soit $P \in \mathbb{R}_2[x]$, il existe $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Par linéarité de Φ , on a :

$$\begin{aligned} \phi(P)(x) &= a_0\Phi(1) + a_1\Phi(x) + a_2\Phi(x^2) \\ &= a_0(3 + 3x - 2x^2) + a_1(-2 - 3x + 5x^2) + a_2(-1 - x + x^2) \\ &= 3a_0 - 2a_1 - a_2 + (3a_0 - 3a_1 - a_2)x + (-2a_0 + 5a_1 + a_2)x^2 \end{aligned}$$

2. $Q_0(x) = 1 + 2x^2$, pour calculer $\Phi(Q_0)(x)$, on peut utiliser la formule déterminée précédemment avec $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ et $a_2 = 2$. On a alors :

$$Q_1(x) = \Phi(Q_0)(x) = 1 + x.$$

Comme $Q_2(x) = \Phi^2(Q_0)(x) = \Phi(\Phi(Q_0))(x) = \Phi(Q_1)(x)$ et que $Q_1(x) = 1 + x$. On peut utiliser la formule de la question 1. avec $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ et $a_2 = 0$. On a alors :

$$Q_2(x) = \Phi^2(Q_0)(x) = 1 + 3x^2.$$

Il nous reste à montrer que la famille $\mathcal{C} = (Q_0(x), Q_1(x), Q_2(x)) = (1 + 2x^2, 1 + x, 1 + 3x^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

Cette famille est de cardinal 3 et $\dim(\mathbb{R}_2[x]) = 3$, il suffit donc de montrer que cette famille est libre pour montrer que c'est une base de $\mathbb{R}_2[x]$. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\lambda_1 Q_0 + \lambda_2 Q_1 + \lambda_3 Q_2 = 0$$

soit

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1(1 + 2x^2) + \lambda_2(1 + x) + \lambda_3(1 + 3x^2) = 0$$

i.e.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_2 x + (2\lambda_1 + 3\lambda_3)x^2 = 0$$

Par identification, on obtient le système :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$, on obtient :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Ainsi $\lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1 = 0$ et la famille est bien libre.

3. On a $\Phi(Q_0) = Q_1$, $\Phi(Q_1) = \Phi^2(Q_0) = Q_2$. Il reste à calculer $\Phi(Q_2)$. $Q_2(x) = 1 + 3x^2$, utilisons donc l'expression déterminée à la question 1 avec $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ et $a_2 = 3$. On a donc

$$\Phi(Q_2)(x) = x^2 = Q_2(x) - Q_0(x).$$

Ainsi la matrice de Φ dans la base $\mathcal{C}$ est la suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4 Exercice 7

Pour déterminer $\text{Ker}(f)$, résolvons $AX = 0$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On obtient le système :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x + 2y - 2z = 0 \\ 3y - z = 0 \end{cases}$$

On fait $L_2 \leftarrow L_1 + L_2$, on a :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3y - z = 0 \\ 3y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y - z = -4y \\ z = 3y \end{cases}$$

Ainsi $\text{Ker}(f) = \{(-4y, y, 3y), y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((-4, 1, 3))$. La famille $((-4, 1, 3))$ est donc génératrice de $\text{Ker}(f)$ et comme elle est constituée d'une unique vecteur non nul, elle est libre. Ainsi c'est une base de $\text{Ker}(f)$.

D'après le théorème du rang, on a : $\text{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\text{Ker}(f)) = 3 - 1 = 2$. Ainsi une base de $\text{Im}(f)$ sera de cardinal 2. Notons C_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$ les colonnes de A , on remarque que $C_2 + 3C_3 = 4C_1$. Ainsi la famille $((1, 2, 3), (1, -2, -1))$ engendre $\text{Im}(f)$ et comme elle est de cardinal 2, c'en est une base.

5 Exercice 8

1. La matrice de u dans la base canonique est la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et posons $X = \text{mat}_{\mathcal{B}}((x, y, z))$, résolvons $MX = 0$ pour déterminer $\text{Ker}(u)$. On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} -2x & - & 4z & = & 0 \\ & 3y & & = & 0 \\ 2x & + & 4z & = & 0 \end{cases}$$

Le système est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} x & = & -2z \\ y & = & 0 \end{cases}$$

On a donc : $\text{Ker}(u) = \{-2z, 0, z\}, z \in \mathbb{R} = \text{Vect}((-2, 0, 1))$. On remarque que $\text{Ker}(u) \neq \{0\}$ donc u n'est pas injectif. Comme u est un endomorphisme, injectif équivaut à surjectif équivaut à bijectif donc comme u n'est pas injectif, il n'est pas surjectif non plus.

3. Comme (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a :

$$\text{Im}(u) = \text{Vect}(u(e_1), u(e_2), u(e_3)) = \text{Vect}(-2e_1 + 2e_3, 3e_2, -4e_1 + 4e_3) = \text{Vect}(-2e_1 + 2e_3, 3e_2)$$

car $-4e_1 + 4e_3 = 2(-2e_1 + 2e_3)$. On a donc $\text{Im}(u) = \text{Vect}((-2, 0, 2), (0, 1, 0))$. Les deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc ils forment une famille libre de $\text{Im}(u)$. Comme ils sont également une famille génératrice de $\text{Im}(u)$, c'est une base de $\text{Im}(u)$.

4. La famille $(-2, 0, 1)$ est une famille génératrice de $\text{Ker}(u)$ et elle libre car composée d'un unique vecteur non nul donc c'est une base de $\text{Ker}(u)$. De plus, $((-2, 0, 2), (0, 1, 0))$ est une base $\text{Im}(u)$. Montrons que la concaténation de ces deux bases donne une base de $\mathbb{R}^3$.

Commençons par montrer que la famille est libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\lambda_1(-2, 0, 2) + \lambda_2(0, 1, 0) + \lambda_3(-2, 0, 1) = (0, 0, 0).$$

On obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} -2\lambda_1 & - & 2\lambda_3 & = & 0 \\ & \lambda_2 & & = & 0 \\ 2\lambda_1 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{cases}$$

Ainsi, on obtient immédiatement $\lambda_2 = 0$ puis la première ligne donne $\lambda_1 = -\lambda_3$ ce qui donne en l'injectant dans la ligne 3, $\lambda_3 = 0$ et donc $\lambda_1 = 0$. Ainsi la famille est libre.

On remarque que la famille est de cardinal 3 ce qui est égal à la dimension de $\mathbb{R}^3$ donc cette famille est bien une base de $\mathbb{R}^3$ et on a : $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$.

6 Exercice 12

1. On a : $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$. On remarque que $A^3 = 2A + 5I_3$.

2. On a alors :

$$A^3 = 2A + 5I_3 \iff A^3 - 2A = 5I_3 \iff A \times (A^2 - 2I_3) = 5I_3 \iff A \times \frac{1}{5}(A^2 - 2I_3) = I_3.$$

$$\text{Ainsi la matrice } A \text{ est inversible et } A^{-1} = \frac{1}{5}(A^2 - 2I_3) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -6 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

7 Exercice 13

1. Pour déterminer un polynôme annulateur de f , il est plus simple de passer par sa matrice associée dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a :

$$A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a : $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = I_3$. Ainsi le polynôme $P(x) = x^3 - 1$ est un polynôme annulateur de A .

Par définition de $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$, on a :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \text{mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3})$$

soit

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(f^3) = \text{mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}).$$

Les endomorphismes f^3 et $\text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ ont donc la même matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$, ils sont donc égaux. Ainsi $f^3 = \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ et le polynôme P est aussi un polynôme annulateur de f .

2. On a alors :

$$f \circ f^2 = \text{Id}_{\mathbb{R}^3}.$$

On en déduit que f est bijectif et que $f^{-1} = f^2$.