Correction des exercices du TD 24

Table des matières

1 Exercice 1 2
2 Exercice 2 3
3 Exercice 3 3
4 Exercice 5 5
5 Exercice 7 6
6 Exercice 8 7
7 Exercice 9 9
8 Exercice 12 9
9 Exercice 13 10

 © M. Fontaine

1 Exercice 1

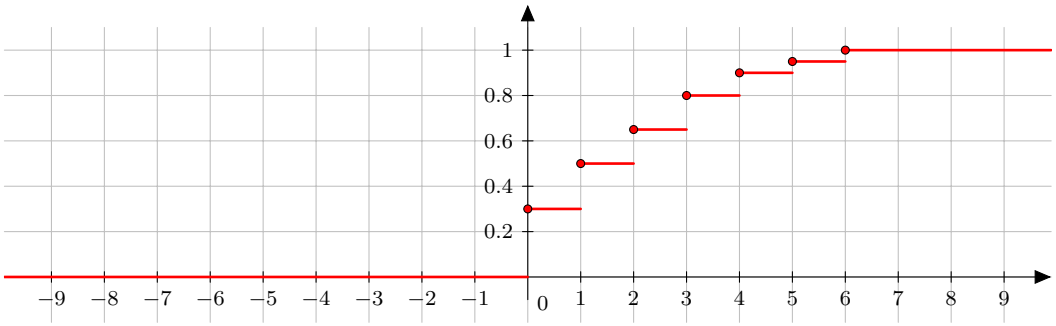
1. Par définition, $F_X(x) = P(X \leqslant x)$

   - Si $x < 0$, $\quad F_X(x) = 0$
   - Si $0 \leqslant x < 1$, $\quad F_X(x) = P(X = 0) = 0.3$
   - Si $1 \leqslant x < 2$, $\quad F_X(x) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.3 + 0.2 = 0.5$
   - Si $2 \leqslant x < 3$, $\quad F_X(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0.5 + 0.15 = 0.65$
   - Si $3 \leqslant x < 4$, $\quad F_X(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0.65 + 0.15 = 0.8$
   - Si $4 \leqslant x < 5$, $\quad F_X(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0.8 + 0.1 = 0.9$
   - Si $5 \leqslant x < 6$, $\quad F_X(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = 0.9 + 0.05 = 0.95$
   - Si $x \geqslant 6$, $F_X(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6 \text{ et } +) = 0.95 + 0.05 = 1$

     En résumé,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.3 & 0 \leqslant x < 1 \\ 0.5 & 1 \leqslant x < 2 \\ 0.65 & 2 \leqslant x < 3 \\ 0.8 & 3 \leqslant x < 4 \\ 0.9 & 4 \leqslant x < 5 \\ 0.95 & 5 \leqslant x < 6 \\ 1 & x \geqslant 6 \end{cases}.$$

   Voici une représentation graphique de F_X :



2. La probabilité que la machine ait plus de 3 pannes correspond au terme $P(X \geqslant 3)$. On a :

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 3) &= 1 - P(X < 3) \\ &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) \\ &= 1 - 0.3 - 0.2 - 0.15 = 0.35. \end{aligned}$$

   La probabilité que la machine ait plus de 3 pannes est donc de 0.35.

3. Remarquons tout d'abord que :

$$P(X \geqslant x_0) = 0.5 \iff 1 - P(X < x_0) = 0.5 \iff P(X < x_0) = 0.5.$$

   Au regard de l'expression de la fonction de répartition F_X, on remarque $P(X < 2) = 0.5$. Ainsi $x_0 = 2$.

4. On a $P(X \leqslant x_1) = F_X(x_1)$. Or d'après l'expression de F_X, on voit qu'elle ne prend jamais la valeur 0.7. Ainsi il n'existe aucun x_1 tel que $F_X(x_1) = 0.7$.

5. D'après le cours, on a :

$$E(X) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i P(X = x_i).$$

   Dans notre exemple, cela donne :

$$E(X) = 0 \times 0.3 + 1 \times 0.2 + 2 \times 0.15 + 3 \times 0.15 + 4 \times 0.1 + 5 \times 0.05 + 7.5 \times 0.05 = 1.975.$$

   Le nombre moyen de pannes journalières est de 1.975 pannes.

2 Exercice 2

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0,1[$, on rappelle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$. Calculons la fonction de répartition de X. On a :

- Si $t < 1$, $F_X(t) = P(X \leqslant t) = 0$
- Si $t \in [1,2[$, $F_X(t) = P(X \leqslant t) = P(X=1) = p$
- Si $t \in [2,3[$, $F_X(t) = P(X \leqslant t) = P(X=1) + P(X=2) = p + p(1-p) = p(2-p)$
- Si $t \in [3,4[$, $F_X(t) = P(X \leqslant t) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = p(1-2p) + p(1-p)^2 = p(1-2p+1-2p+p^2) = p(2-4p+p^2)$
- Si $t \in [k, k+1[$ pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} F_X(t) &= P(X \leqslant t) = \sum_{i=1}^{k} P(X=i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} p(1-p)^{i-1} = p\sum_{i=1}^{k}(1-p)^{i-1} \\ &= \frac{p}{1-p}\sum_{i=1}^{k}(1-p)^{i} = \frac{p}{1-p} \times (1-p) \times \frac{1-(1-p)^k}{1-(1-p)} \\ &= 1-(1-p)^k \end{aligned}$$

3 Exercice 3

1. On introduit deux variables aléatoires N_1 et N_2 égales respectivement au numéro de la première boule et au numéro de la deuxième boule. On a donc $Y = \max(N_1, N_2)$.
   On a : $Y(\Omega) = [\![2, n]\!]$ car on tire les deux boules simultanément donc si l'une a le numéro 1, le plus petit numéro que peut avoir l'autre boule est le 2. Déterminons la fonction de répartition de Y. Soit $k \in [\![2,n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned} P(Y \leqslant k) &= P(\max(N_1, N_2) \leqslant k) \\ &= P([N_1 \leqslant k] \cap [N_2 \leqslant k]) \\ &= P(N_1 \leqslant k) P_{[N_1 \leqslant k]}(N_2 \leqslant k) \quad \text{ou} \quad P(Y \leqslant k) = \frac{\binom{k}{2}}{\binom{n}{2}} \\ &= \frac{k}{n} \times \frac{k-1}{(n-1)} \\ &= \frac{k(k-1)}{n(n-1)}. \end{aligned}$$

   Pour $k \in [\![3,n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned} P(Y=k) &= P(Y \leqslant k) - P(Y \leqslant k-1) \\ &= \frac{k(k-1)}{n(n-1)} - \frac{(k-1)(k-2)}{n(n-1)} \\ &= \frac{2(k-1)}{n(n-1)} \end{aligned}$$

   On a : $P(Y=2) = \dfrac{1}{\binom{n}{2}} = \dfrac{2}{n(n-1)}$.
   La formule précédente est donc valable pour $k=2$ également, on a donc :

$$Y(\Omega) = [\![2,n]\!] \quad \text{et} \quad P(Y=k) = \frac{2(k-1)}{n(n-1)}.$$

   Maintenant que l'on connaît la loi de Y, on en déduit facilement son espérance. Y est une variable aléatoire finie donc son

espérance existe, on a :

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{k=2}^{n} kP(Y=k) \\
&= \sum_{k=2}^{n} k \times \frac{2(k-1)}{n(n-1)} \\
&= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \\
&= \frac{2}{n(n-1)} \left(\sum_{k=2}^{n} k^2 - \sum_{k=2}^{n} k \right) \\
&= \frac{2}{n(n-1)} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1 - \frac{n(n+1)}{2} + 1 \right) \\
&= \frac{2}{n(n-1)} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right) \\
&= \frac{2n(n+1)}{n(n-1)} \left(\frac{2n+1}{6} - \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{2(n+1)}{(n-1)} \times \frac{n-1}{3} \\
&= \frac{2(n+1)}{3}
\end{aligned}$$

2. En reprenant les notations introduites à la question 1., on peut écrire que : $X = \min(N_1, N_2)$.
On a : $X(\Omega) = [\![1, n-1]\!]$ car on tire les deux boules simultanément donc si l'une a le numéro n, le plus grand numéro que peut avoir l'autre boule est le $n-1$. Déterminons la fonction de répartition de X. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}
P(X \leqslant k) &= P(\min(N_1, N_2) \leqslant k) \\
&= 1 - P(\min(N_1, N_2) > k) \\
&= 1 - P(\min(N_1, N_2) \geqslant k+1) \\
&= 1 - P([N_1 \geqslant k+1] \cap [N_2 \geqslant k+1]) \\
&= 1 - P(N_1 \geqslant k+1) P_{[N_1 \geqslant k+1]}(N_2 \geqslant k+1) \quad \text{ou} \quad P(X \leqslant k) = 1 - \frac{\binom{n-k}{2}}{\binom{n}{2}} \\
&= 1 - \frac{n-k}{n} \times \frac{n-k-1}{(n-1)} \\
&= 1 - \frac{(n-k)(n-k-1)}{n(n-1)}.
\end{aligned}$$

Pour $k \in [\![2, n-1]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}
P(X=k) &= P(X \leqslant k) - P(X \leqslant k-1) \\
&= 1 - \frac{(n-k)(n-k-1)}{n(n-1)} - \left(1 - \frac{(n-(k-1))(n-(k-1)-1)}{n(n-1)} \right) \\
&= \frac{(n-k+1)(n-k)}{n(n-1)} - \frac{(n-k)(n-k-1)}{n(n-1)} \\
&= \frac{(n-k)(n-k+1-n+k+1)}{n(n-1)} \\
&= \frac{2(n-k)}{n(n-1)}
\end{aligned}$$

On a : $P(X=1) = \dfrac{1 \times \binom{n-1}{1}}{\binom{n}{2}} = \dfrac{2(n-1)}{n(n-1)} = \dfrac{2}{n}$.
La formule précédente est donc valable pour $k=1$ également, on a donc :

$$X(\Omega) = [\![1, n-1]\!] \quad \text{et} \quad P(Y=k) = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}.$$

4 Exercice 5

1. Il faut potentiellement une infinité de tirages pour obtenir une boule noire et X peut prendre la valeur 0 si on n'obtient jamais de boule noire. Ainsi
$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{0\} = \mathbb{N}.$$

2. On doit déterminer $P(X = k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.
Soit k dans $\mathbb{N}^*$. Calculons $P(X = k)$.
On note B_i l'événement : « tirer une boule blanche au i-ème tirage » et N_i l'événement : « tirer une boule noire au i-ème tirage ». $(X = k)$ correspond à l'événement : tirer une première boule noire au k-ème tirage. On a alors :
$$(X = k) = B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{k-1} \cap N_k$$
donc
$$P(X = k) = P(B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{k-1} \cap N_k)$$
D'après la formule des probabilités composées, on a :
$$P(X = k) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times P_{B_1 \cap B_2}(B_3) \times \ldots \times P_{B_1 \cap \ldots \cap B_{k-2}}(B_{k-1}) \times P_{B_1 \cap \ldots \cap B_{k-1}}(N_k)$$
donc
$$P(X = k) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \ldots \times \frac{k-1}{k} \times \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}.$$
Il reste à déterminer $P(X = 0)$. L'événement $(X = 0)$ correspond au fait de ne tirer que des boules blanches. Ainsi :
$$(X = 0) = B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap \ldots = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n.$$
Si on tire une boule blanche au $n+1$-ème tirage alors c'est qu'on a tiré une boule blanche au n-ème tirage (sinon les tirages se seraient arrêtés). Ainsi $B_{n+1} \subset B_n$ et donc la suite $(B_n)_n$ est décroissante. D'après le théorème de la limite monotone, on a donc :
$$P(X = 0) = P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n\right) = \lim_{n \to +\infty} P(B_n).$$
L'événement B_n correspond à avoir une boule blanche au n-ème tirage, cela veut donc dire qu'on n'a eu que des boules blanches aux tirages d'avant. On a donc :
$$B_n = B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap \ldots \cap B_n.$$
Ainsi d'après la formule des probabilités composées :
$$P(B_n) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \ldots \times \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$
Ainsi $P(X = 0) = \lim\limits_{n \to +\infty} P(B_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0.$
Remarque : Pour calculer $P(X = 0)$, on peut aussi utiliser le corollaire du théorème de limite monotone :
$$P(X = 0) = \lim_{n \to +\infty} P\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right)$$
et le terme $P\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} B_k\right)$ peut se calculer à l'aide de la formule des probabilités composées.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, étudions la convergence de la somme partielle :
$$\sum_{k=1}^{n} P(X = k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$
Rappelons cet astuce déjà vu :
$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}.$$
On a alors
$$P(X = k) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right).$$

Par télescopage, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} P(X=k) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$ donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} P(X=n)$ converge et :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) = 1.$$

5 Exercice 7

1. On définit bien une loi de probabilité si $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} P(X=k)=1$. Calculons la somme de cette série en fonction de a et ensuite cherchons a pour que sa somme fasse 1. On doit donc commencer par étudier la convergence de cette série et pour cela, on introduit sa somme partielle. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} P(X=k) &= \sum_{k=1}^{\infty} a3^{-k} = a\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k} = a\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k \\ &= a\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k - a\left(\frac{1}{3}\right)^0 = a\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k - a\end{aligned}$$

On reconnaît alors la somme partielle de la série géométrique dérivée première pour $q=\frac{1}{3}$. Cette somme converge car $q\in]-1;1[$, on a alors :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a3^{-k} = \frac{a}{1-\frac{1}{3}} - a = \frac{3a}{2} - a = \frac{a}{2}.$$

Il faut donc que $\boxed{\text{a=2}}$ pour que l'on définisse bien une loi de probabilité.

2. Soit $k\in\mathbb{N}^*$, on se demande si

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=2k) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=2k+1) \quad \text{ou bien} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=2k) \geqslant \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=2k+1).$$

On doit donc calculer ces deux séries. On sait déjà que les séries convergent car on a bien défini une loi de probabilité. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=2k) &= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2}{3^{2k}} = 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(3^2)^k} = 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{9^k} \\ &= 2\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^k = 2\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^k - 1\right) \\ &= 2\left(\frac{1}{1-\frac{1}{9}} - 1\right) = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=2k+1) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2}{3^{2k+1}} = 2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(3^2)^k\times 3} = \frac{2}{3}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{9^k} \\ &= \frac{2}{3}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^k = \frac{2}{3}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^k\right) \\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{9}}\right) = \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{4}<\frac{3}{4}$, la variable aléatoire X a plus de chance de prendre des valeurs impaires.

3. Commençons par montrer que X admet une espérance. Pour cela on doit étudier l'absolue convergence de la série de terme général $kP(X=k)$. Ce terme étant positif, cela revient à étudier la convergence de cette série. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k\frac{2}{3^k} = 2\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}.$$

On reconnaît alors la somme partielle de la série géométrique dérivée première avec $q = \dfrac{1}{3}$. Cette somme partielle converge car $q \in]-1;1[$. Ainsi notre série converge donc X admet une espérance et on a :

$$E(X) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{3}{2}.$$

Montrons que X admet une variance. Pour cela, montrons qu'elle admet un moment d'ordre 2, c'est à dire que $E(X^2)$ existe bien. Pour cela, d'après le théorème de transfert, on doit étudier l'absolue convergence de la série de terme général $k^2P(X=k)$. Ce terme étant positif, cela revient à étudier la convergence de cette série. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} k^2\frac{2}{3^k} = 2\sum_{k=1}^{n} k^2\left(\frac{1}{3}\right)^k \\ &= 2\sum_{k=1}^{n} k(k-1+1)\left(\frac{1}{3}\right)^k = 2\sum_{k=1}^{n} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^k + 2\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{3}\right)^k \\ &= \frac{2}{3^2}\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} + \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

On reconnaît d'abord la somme partielle de la série géométrique dérivée seconde pour $q = \dfrac{1}{3}$ et ensuite la somme partielle de la série géométrique dérivée première pour $q = \dfrac{1}{3}$. Ces deux sommes partielles convergent car $q \in]-1;1[$. Ainsi $E(X^2)$ existe et on a :

$$E(X^2) = \frac{2}{9} \times \frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = 3.$$

On conclut à l'aide de la formule de König-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

4. On a $Y = X(X-1) = X^2 - X$. Comme X admet une espérance et une variance, on en déduit que Y admet bien une espérance. Par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(Y) = E(X^2) - E(X) = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

Ainsi la variable aléatoire Y admet bien une espérance.

6 Exercice 8

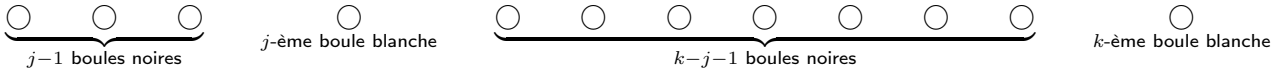
1. On appelle succès l'événement « obtenir une première boule blanche ». Sa probabilité vaut $p_1 = \dfrac{a}{a+b}$. Alors la variable aléatoire X_1 qui est égale au rang d'apparition de la première boule blanche compte le nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir un premier succès en répétant indépendamment l'expérience de Bernoulli associée. Elle suit donc une loi géométrique de paramètre p_1. On a : $X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p_1)$. On a alors :

$$\text{Pour } k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_1=k) = \left(1-\frac{a}{a+b}\right)^{k-1} \times \frac{a}{a+b} = \left(\frac{b}{a+b}\right)^{k-1} \times \frac{a}{a+b}.$$

D'après le cours, on a :

$$E(X_1) = \frac{1}{p_1} = \frac{a+b}{a} \quad \text{et} \quad V(X_1) = \frac{1-p_1}{p_1^2} = \frac{b(a+b)}{a}.$$

2. On peut représenter ainsi le résultat d'un tirage où la première boule blanche arrive en j-ème position et où la deuxième boule blanche arrive en k-ème position :



La variable aléatoire X_2 est égale au rang d'apparition de la deuxième boule blanche. On a $X_2(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

$$\text{Pour } k \in X_2(\Omega), \quad P(X_2 = k) = \binom{k-1}{1} \frac{a}{a+b} \times \left(\frac{b}{a+b}\right)^{k-2} \times \frac{a}{a+b}.$$

- Terme bleu : Avec le terme $\binom{k-1}{1}$, on choisit l'emplacement de la première boule blanche. Elle peut être partout sauf en k-ème position. Ce terme est multiplié par la probabilité de tirer une boule blanche, à savoir $\frac{a}{a+b}$.
- Terme rouge : Une fois la première et la deuxième boule blanche fixées, on n'a plus le choix pour nos $k-2$ boules noires restantes. On a donc la probabilité de tirer $k-2$ boules noires, à savoir $\left(\frac{b}{a+b}\right)^{k-2}$.
- Terme orange : La dernière boule est forcément blanche et il ne reste plus qu'à multiplier par la probabilité de tirer une boule blanche, à savoir $\frac{a}{a+b}$.

Ainsi,

$$\text{pour } k \in X_2(\Omega), \quad P(X_2 = k) = (k-1)\left(\frac{a}{a+b}\right)^2 \left(\frac{b}{b+a}\right)^{k-2}.$$

Autre méthode pour calculer $P(X_2 = k)$: Cette deuxième méthode est plus dans l'esprit du chapitre sur les couples de variables aléatoires que nous ferons dans quelques semaines.

$$\begin{aligned}
P(X_2 = k) &= \sum_{j=1}^{k-1} P([X_1 = j] \cap [X_2 = k]) \\
&= \sum_{j=1}^{k-1} P([X_1 = j]) P_{[X_1=j]}([X_2 = k]) \\
&= \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{b}{a+b}\right)^{j-1} \times \frac{a}{a+b} \times \left(\frac{b}{a+b}\right)^{k-1-j} \\
&= (k-1)\left(\frac{a}{a+b}\right)^2 \times \left(\frac{b}{a+b}\right)^{k-2}
\end{aligned}$$

Calculons l'espérance de la variable aléatoire X_2, son support étant infini, étudions la convergence de la série de terme général $nP(X_2 = n)$. Pour cela, étudions sa somme partielle, soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} kP(X_2 = k) &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\left(\frac{a}{a+b}\right)^2 \left(\frac{b}{a+b}\right)^{k-2} \\
&= \left(\frac{a}{a+b}\right)^2 \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\left(\frac{b}{a+b}\right)^{k-2}.
\end{aligned}$$

On reconnaît la somme partielle d'une série géométrique dérivée seconde avec $q = \frac{b}{a+b}$. Cette somme partielle converge car $q \in]-1;1[$. Ainsi X_2 admet une espérance et on a :

$$E(X_2) = \left(\frac{a}{a+b}\right)^2 \times \frac{2}{\left(1-\frac{b}{a+b}\right)^3} = \left(\frac{a}{a+b}\right)^2 \times \frac{2(a+b)^3}{a^3} = \frac{2(a+b)}{a}.$$

3. On remarque que $E(X_2) = 2E(X_1)$. Le temps d'attente moyen de la deuxième boule blanche est le double du temps d'attente moyen de la première boule blanche.

7 Exercice 9

Notons X la variable aléatoire égale au nombre d'appels reçus par minute. D'après l'énoncé, le nombre moyen d'appels reçus par minute entre 10h et 11h est de 1,8. On a donc $E(X) = 1,8$. Or l'énoncé nous dit également que X suit une loi de Poisson de paramètre λ. Or pour une loi de Poisson $E(X) = \lambda$. Ainsi $\lambda = 1.8$ et on a $X \hookrightarrow \mathcal{P}(1,8)$.

1. On cherche $P(X = 0)$. On a :
$$P(X = 0) = \frac{\lambda^0}{0!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-1,8}.$$
2. On cherche $P(X = 1)$. On a :
$$P(X = 1) = \frac{\lambda^1}{1!}\mathrm{e}^{-\lambda} = 1,8 \times \mathrm{e}^{-1,8}.$$
3. On cherche $P(X = 2)$. On a :
$$P(X = 2) = \frac{\lambda^2}{2!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \frac{(1,8)^2}{2} \times \mathrm{e}^{-1,8}.$$
4. On cherche $P(X > 2)$. On a :
$$P(X > 2) = 1 - P(X \leqslant 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) = 1 - \mathrm{e}^{-1,8} - 1,8 \times \mathrm{e}^{-1,8} - \frac{(1,8)^2}{2} \times \mathrm{e}^{-1,8}.$$

8 Exercice 12

La loi de X est connue mais pas celle de $Y = \dfrac{1}{X+1}$. Pour calculer son espérance, on va donc utiliser le théorème de transfert. On a :

$$E(Y) = E\left(\frac{1}{1+X}\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{1+k} P(X = k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k+1}\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\lambda^k}{(k+1)!}\mathrm{e}^{-\lambda}.$$

On doit donc étudier l'absolue convergence de la série de terme général $\dfrac{\lambda^k}{(k+1)!}\mathrm{e}^{-\lambda}$ pour montrer que Y admet une espérance. Le terme général étant positif, étudier l'absolue convergence revient à étudier la convergence. Pour cela, étudions sa somme partielle, soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{(k+1)!}\mathrm{e}^{-\lambda} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{(k+1)!}\mathrm{e}^{-\lambda} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\lambda^j}{j!} \quad \text{en posant } j = k+1 \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sum_{j=0}^{n+1} \frac{\lambda^j}{j!} - 1\right).
\end{aligned}$$

On reconnaît alors la somme partielle de la série exponentielle, elle converge et donc Y admet une espérance, on a :

$$E(Y) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}\left(\mathrm{e}^{\lambda} - 1\right) = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\right).$$

9 Exercice 13

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, on a :

$$\begin{aligned}
P(X > k) &= 1 - P(X \leqslant k) = 1 - \sum_{j=1}^{k} P(X = j) \\
&= 1 - \sum_{j=1}^{k} p(1-p)^{j-1} = 1 - p\sum_{j=1}^{k}(1-p)^{j} \\
&= 1 - \frac{p}{1-p}\sum_{j=1}^{k}(1-p)^{j} \\
&= 1 - \frac{p}{1-p} \times (1-p)\left(\frac{1-(1-p)^{k}}{1-(1-p)}\right) \\
&= 1 - p\left(\frac{1-(1-p)^{k}}{p}\right) \\
&= 1 - 1 + (1-p)^{k} = (1-p)^{k}.
\end{aligned}$$

On a pour tout $(k,l) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$,

$$P_{(X>l)}(X > k+l) = \frac{P((X > l) \cap (X > k+l))}{P(X > l)}.$$

Or si $X > k+l$, en particulier $X > l$ donc $(X > l) \cap (X > k+l) = (X > k+l)$, on a alors (en utilisant le calcul précédent) :

$$P_{(X>l)}(X > k+l) = \frac{P(X > k+l)}{P(X > l)} = \frac{(1-p)^{k+l}}{(1-p)^{l}} = (1-p)^{k} = P(X > k).$$