# Variables aléatoires discrètes

## Exercice 1 (♣)

Le nombre de pannes journalières d'une machine est une variable aléatoire $X$ dont la loi de probabilité est donnée par :

| $x$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ | $6$ et $+$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $0,30$ | $0,20$ | $0,15$ | $0,15$ | $0,10$ | $0,05$ | $0,05$ |

1. Quelle est la fonction de répartition de $X$ ? En donner une représentation graphique.
2. Quelle est la probabilité que la machine ait plus de 3 pannes ?
3. Trouver $x_1$ tel que $P(X \leq x_1) = 0,7$.
4. Trouver $x_0$ tel que $P(X \geq x_0) = 0,5$.
5. Calculer $E(X)$ en donnant à « 6 et + » la valeur moyenne 7,5.

## Exercice 2 (♥)

Calculer la fonction de répartition de la loi géométrique de paramètre $p$.

## Exercice 3 (♥)

Une urne contient $n$ boules numérotées de $1$ à $n$. On tire simultanément deux boules.

1. On note $Y$ le plus grand des numéros des deux boules. Déterminer la fonction de répartition puis la loi de $Y$. Déterminer l'espérance de $Y$.
2. On note $X$ le plus petit des deux numéros tirés. En procédant comme précédemment, déterminer la loi de la variable aléatoire $X$.

## Exercice 4 (♠)

Une urne contient $p$ boules numérotées de 1 à $p$. On tire $n$ boules avec remise, et on note $X$ le plus grand des numéros tirés.

1. Calculer la fonction de répartition de $X$.
2. En déduire la loi de $X$.

## Exercice 5 (♥)

Une urne contient au départ une boule blanche et une boule noire. On effectue des tirages d'une boule avec remise jusqu'à l'obtention d'une boule noire, en rajoutant à chaque tirage une boule blanche supplémentaire. On note $X$ la variable aléatoire correspondant au numéro du tirage final où apparaît une boule noire, si un tel tirage existe, et à 0 si à chaque tirage une boule blanche est obtenue.

1. Déterminer $X(\Omega)$.
2. Déterminer la loi de $X$.
3. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) = 1.$$

## Exercice 6 (♣)

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

   (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définit bien une loi de probabilité.

   (b) Soit $X$ une variable aléatoire de support $\mathbb{N}^*$, dont la loi est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X=n) = u_n.$$

   $X$ admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

   (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définit bien une loi de probabilité.

   (b) Soit $Y$ une variable aléatoire de support $\mathbb{N}^*$, dont la loi est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(Y=n) = v_n.$$

   $Y$ admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

## Exercice 7 (♣)

Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X=k) = a3^{-k}.$$

1. Déterminer $a$ pour que l'on définisse bien une loi de probabilité.
2. $X$ a-t-elle plus de chance de prendre des valeurs paires ou impaires ?
3. Montrer que $X$ admet une espérance et une variance, et les calculer.
4. On pose $Y = X(X-1)$. Montrer que $Y$ admet une espérance et la calculer.

## Exercice 8 (♦)

Une urne contient $a$ boules blanches et $b$ boules noires. On effectue une infinité de tirages, en remettant à chaque fois la boule tirée.

1. Soit $X_1$ la variable aléatoire égale au rang de tirage de la première boule blanche. Reconnaître la loi de $X_1$ et donner sans calculs $E(X_1)$ et $V(X_1)$.
2. Soit $X_2$ la variable aléatoire égale au rang de tirage de la deuxième boule blanche. Donner la loi de $X_2$ et calculer son espérance.
3. Comparer $E(X_1)$ et $E(X_2)$. Commentaire ?

**Exercice 9 (♣)**

Sachant que le nombre moyen de communications reçues par un standard entre 10h et 11h est de $1,8$ appels par minute et que le nombre d'appels reçus par minute suit une loi de Poisson, calculer la probabilité qu'entre 10h53 et 10h54 il y ait :

1. aucun appel
2. un appel
3. deux appels
4. plus de deux appels

**Exercice 10 (♣)**

Soit $X$ une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad P(X = n) = \frac{4}{n} P(X = n - 1)$$

Déterminer cette loi.

**Exercice 11 (♣)**

On suppose qu'une variable aléatoire $X$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda$. On pose $Y = \mathrm{e}^{-X}$. Montrer que $Y$ admet une espérance et la calculer. Faire de même avec la variance.

**Exercice 12 (♣)**

On suppose qu'une variable aléatoire $X$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda$. On pose $Y = \dfrac{1}{1+X}$. Montrer que $Y$ admet une espérance et la calculer.

**Exercice 13 (♥)**

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X > k) = (1-p)^k$. En déduire alors que

$$\forall (k,l) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, P_{(X>l)}(X > k + l) = P(X > k).$$

On dit que la variable aléatoire est sans mémoire.

**Exercice 14 (♣)**

Sur le marché du travail de l'agglomération dunkerquoise, le nombre moyen de changements d'emploi d'un ouvrier dans une période de 5 ans est deux. Sachant que le nombre de changements d'emploi en 5 ans suit une loi de Poisson, calculer la probabilité des événements suivants :

1. Probabilité qu'un travailleur ne fasse aucun changement pendant 5 ans.
2. Probabilité qu'un travailleur fasse au moins un changement.
3. Probabilité qu'il fasse plus d'un changement, mais moins de 5.
4. Probabilité qu'il fasse au plus deux changements au cours de deux périodes de 5 ans. Sous quelle hypothèse peut-on effectuer ce calcul ?

**Exercice 15 (♣)**

Une urne contient 2 boules blanches et $n-2$ boules rouges. On effectue des tirages sans remise de cette urne. On appelle $X$ le rang de sortie de la première boule blanche, $Y$ le nombre de boules rouges restantes à ce moment dans l'urne et $Z$ le rang de sortie de la deuxième boule blanche.

1. Déterminer la loi de $X$ et son espérance.
2. Exprimer $Y$ en fonction de $X$ et calculer $E(Y)$.
3. Trouver un lien entre $Z$ et $X$ et en déduire la loi de $Z$.

♣ Du trèfle à brouter…
♥ À connaître par coeur.
♠ Qui s'y frotte s'y pique !
♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau !