Etude d'un problème, corrigé

Problème 1 *Ecricome 2017 voie S*

1. (a) Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0}$.

   Et alors, par continuité de l'exponentielle, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{f(x)} = e^0 = 1$. Ainsi $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 1}$.

   (b) Notons que, par croissance de l'exponentielle, il suffit d'étudier le sens de variation de f, car alors $g = \exp(f)$ possède les mêmes variations que f. La fonction f est dérivable sur $]0,1]$ car produit de fonctions dérivables, avec

$$f'(t) = \ln t + \frac{t}{t} = \ln t + 1.$$

   On a donc $f'(t) \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln t \geqslant -1 \Leftrightarrow t \geqslant e^{-1}$. Et donc le tableau de variations de f, puis celui de g s'en déduisent immédiatement. On a :

$$f(\mathrm{e}^{-1}) = \mathrm{e}^{-1}(-1) = -\mathrm{e}^{-1} \quad \text{et} \quad g(\mathrm{e}^{-1}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-1}}.$$

x	0		e^{-1}		1
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	‖ 0	$\searrow$	$-\mathrm{e}^{-1}$	$\nearrow$	0

x	0		e^{-1}		1
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de g	‖ 1	$\searrow$	$\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-1}}$	$\nearrow$	1

   (c) La fonction g est continue sur $]0,1]$, et prolongeable par continuité en 0 , donc l'intégrale $\int_0^1 g(t)dt$ est faussement impropre, et donc $\boxed{\text{convergente}}$.

2. (a) Pour $n=0$, la fonction $t \mapsto (t\ln t)^0 = 1$ est continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité en 0.
   Et pour $n \geqslant 1$, la fonction $t \mapsto (t\ln(t))^n$ est continue sur]0, 1], et d'après la question 1.(a), admet une limite finie en 0.
   Dans les deux cas, $t \mapsto (t\ln t)^n$ est prolongeable par continuité en une fonction continue sur $[0,1]$, donc l'intégrale $\int_0^1 (t\ln(t))^n dt$ est faussement impropre, et donc $\boxed{\text{convergente}}$.

   (b) D'après le tableau de variations réalisé à la question 1.(b), on a, pour tout $t \in]0,1]$, $|f(t)| \leqslant \mathrm{e}^{-1}$. Et donc pour tout $t \in]0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|(t\ln(t))^n| \leqslant \left(e^{-1}\right)^n \leqslant 1.$$

   Ainsi, par l'inégalité triangulaire,

$$\left|\int_0^1 (t\ln t)^n dt\right| \leqslant \int_0^1 1dt = 1.$$

On en déduit donc que
$$0 \leqslant |u_n| \leqslant \frac{1}{n!}.$$
Par le théorème d'encadrement, on a alors $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

(c) On a $u_0 = \dfrac{1}{0!}\displaystyle\int_0^1 1\mathrm{d}t = 1$ donc $\boxed{u_0 = 1}$. D'autre part, $u_1 = \dfrac{1}{1!}\displaystyle\int_0^1 t\ln(t)\mathrm{d}t$. Procédons alors à une intégration par parties sur un segment de la forme $[A,1]$, avec $A \in]0,1]$, en posant $u(t) = \ln t$ et $v(t) = \dfrac{t^2}{2}$, de sorte que u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[A,1]$ avec $u'(t) = \dfrac{1}{t}$ et $v'(t) = t$. Alors
$$\begin{aligned}\int_A^1 t\ln(t)\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^2}{2}\ln(t)\right]_A^1 - \int_A^1 \frac{t^2}{2}\frac{1}{t}\mathrm{d}t\\ &= -\frac{A^2}{2}\ln(A) - \int_A^1 \frac{t}{2}\mathrm{d}t\\ &= -\frac{A^2}{2}\ln(A) - \left[\frac{t^2}{4}\right]_A^1\\ &= -\frac{A^2}{2}\ln(A) - \frac{1}{4} + \frac{A^2}{4}\end{aligned}$$
Or par croissance comparée, $\lim\limits_{A\to0^+} \dfrac{A^2}{2}\ln(A) = 0$ donc $\lim\limits_{A\to0^+} -\dfrac{A^2}{2}\ln(A) - \dfrac{1}{4} + \dfrac{A^2}{4} = -\dfrac{1}{4}$. On a donc $\boxed{u_1 = -\dfrac{1}{4}}$.

(d) Calculons u_n à l'aide d'une intégration par parties sur un segment de la forme $[A,1]$, en posant $u(t) = (\ln t)^n$ et $v(t) = \dfrac{t^{n+1}}{n+1}$, qui sont bien deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[A,1]$, avec
$$u'(t) = \frac{n}{t}(\ln t)^{n-1} \text{ et } v'(t) = t^n$$
Alors
$$\begin{aligned}\int_A^1 t^n(\ln t)^n\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}(\ln t)^n\right]_A^1 - \frac{n}{n+1}\int_A^1 \frac{t^{n+1}}{t}(\ln t)^{n-1}\mathrm{d}t\\ &= -\frac{A^{n+1}}{n+1}(\ln A)^n - \frac{n}{n+1}\int_A^1 t^n\ln(t)^{n-1}\mathrm{d}t\end{aligned}$$
Or $\lim\limits_{A\to0^+} -\dfrac{A^{n+1}}{n+1}(\ln A)^n = 0$ par croissance comparée donc
$$\lim_{A\to0^+} -\frac{A^{n+1}}{n+1}(\ln A)^n - \frac{n}{n+1}\int_A^1 t^n\ln(t)^{n-1}\mathrm{d}t = -\frac{n}{n+1}\int_0^1 t^n(\ln t)^{n-1}\mathrm{d}t$$
Une nouvelle intégration par parties nous donne
$$\begin{aligned}\int_A^1 t^n(\ln t)^{n-1}dt &= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}(\ln t)^{n-1}\right]_A^1 - \frac{n-1}{n+1}\int_A^1 t^n(\ln t)^{n-2}dt\\ &= -\frac{A^{n+1}}{n+1}(\ln A)^{n-1} - \frac{n-1}{n+1}\int_A^1 t^n(\ln t)^{n-2}dt\\ &\underset{A\to0^+}{\longrightarrow} -\frac{n-1}{n+1}\int_0^1 t^n(\ln t)^{n-2}dt\end{aligned}$$
Plus généralement, une intégration par parties similaire prouve que pour tout $k \leqslant n-1$,
$$\int_0^1 t^n(\ln t)^{n-k}dt = -\frac{n-k}{n+1}\int_0^1 t^n(\ln t)^{n-k-1}dt$$
Et alors
$$u_n = -\frac{1}{n!}\frac{n}{n+1}\int_0^1 t^n(\ln t)^{n-1}dt = \frac{1}{n!}\frac{(-1)^2 n(n-1)}{(n+1)^2}\int_0^1 t^n(\ln t)^{n-2}dt = \cdots = \frac{1}{n!}\frac{(-1)^n n!}{(n+1)^n}\int_0^1 t^n dt = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$$

(e) Pour $n \geqslant 1$, on a

$$0 \leqslant |u_n| = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \leqslant \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

Or, la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ est une série (de Riemann) convergente, et donc par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, la série de terme général $|u_n|$ est également convergente. Ainsi, la série de terme général u_n est absolument convergente, et donc convergente.

(f) On peut proposer la fonction suivante :

```python
def somme(n):
    S=0
    for k in range(n+1):
        S=S+(-1)**k/(k+1)**(k+1)
    return S
```

3. (a) Notons $h : x \mapsto \mathrm{e}^x$ la fonction exponentielle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction h est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\left[-\dfrac{1}{\mathrm{e}}, 0\right]$, et pour tout $k \in [\![0, n+1]\!]$, $h^{(k)}(x) = \mathrm{e}^x$. En particulier, pour tout $t \in \left[-\dfrac{1}{e}, 0\right]$, on a

$$\left|h^{n+1}(t)\right| = \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}^0 = 1.$$

Ainsi, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, pour tout $x \in \left[-\dfrac{1}{\mathrm{e}}, 0\right]$,

$$\left|h(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} x^k\right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Soit encore

$$\left|\mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Mais pour $x \in \left[-\dfrac{1}{\mathrm{e}}, 0\right]$, $|x| \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, de sorte que $|x|^{n+1} \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}^{n+1}}$. Et donc

$$\left|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \leqslant \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}$$

(b) Nous avons prouvé à la question 1.(b) que pour tout $t \in]0,1]$, $t \ln t \in \left[-\dfrac{1}{\mathrm{e}}, 0\right]$. Et donc le résultat de la question 3.(a) s'applique : pour tout $t \in]0,1]$,

$$\left|\mathrm{e}^{t\ln(t)} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(t\ln t)^k}{k!}\right| \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}^{n+1}(n+1)!}$$

Par croissance de l'intégrale, on a alors

$$\int_0^1 \left|\mathrm{e}^{t\ln(t)} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(t\ln t)^k}{k!}\right| dt \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{n+1}(n+1)!} = \frac{1}{\mathrm{e}^{n+1}(n+1)!}$$

D'autre part, on a

$$|I - S_n| = \left|\int_0^1 \mathrm{e}^{t\ln t}\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n} u_k\right| = \left|\int_0^1 \mathrm{e}^{t\ln t}\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\int_0^1 (t\ln t)^k \mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^1 \left(\mathrm{e}^{t\ln t} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(t\ln t)^k}{k!}\right)\mathrm{d}t\right|.$$

Or, par l'inégalité triangulaire, on a :

$$|I - S_n| = \left|\int_0^1 \left(\mathrm{e}^{t\ln t} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(t\ln t)^k}{k!}\right)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 \left|\mathrm{e}^{t\ln(t)} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(t\ln t)^k}{k!}\right| \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}^{n+1}(n+1)!}$$

(c) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^{n+1}(n+1)!} = 0$, donc par le théorème d'encadrement, $|I - S_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} I - S_n = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = I.$$

Mais S_n est la somme partielle d'ordre n de la série de terme général u_n, et donc cette série converge et $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k = I$.

Or, en utilisant le résultat de la question 2.(d), il vient

$$I = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}.$$

(d) La question 3.(b) nous donne une majoration de l'écart entre I et la somme partielle d'ordre n de la série. Et donc si $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{n+1}(n+1)!} \leqslant \varepsilon$, alors $|I - S_n| \leqslant \varepsilon$, de sorte que S_n est une valeur approchée de I à ε près. Nous proposons donc le programme suivant, qui calcule les valeurs successives de $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{n+1}(n+1)!}$ et s'arrête lorsque cette valeur est inférieure ou égale à ε.

```
def estimation(eps):
    I=1
    n=1
    majorant = np.exp(-1)
    while majorant >= eps
        I= I+(-1)**n/((n+1)**(n+1))
        n=n+1
        majorant=majorant*np.exp(-1)/n
    return I
```