

Etude d'un problème

Problème 1 *Ericome 2017 voie S*

On définit sur l'intervalle $]0, 1]$ les deux fonctions $f : x \mapsto x \ln(x)$ et $g : x \mapsto x^x = e^{x \ln(x)}$.

1. (a) Les fonctions f et g admettent-elles des limites en 0 ?
- (b) Dresser les tableaux de variations des fonctions f et g sur $]0, 1]$.
- (c) Justifier que l'intégrale $\int_0^1 g(t) dt$ est convergente. On notera I sa valeur.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (t \ln(t))^n dt \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

- (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe.
 - (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 .
 - (c) Calculer u_0 et u_1 .
 - (d) À l'aide d'intégrations par parties successives, montrer que :
- $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$$
- (e) Montrer que la série de terme général u_n est convergente.
 - (f) Écrire une fonction Python appelée `somme` qui prend comme paramètre d'entrée un entier naturel n et qui renvoie en sortie la valeur de S_n .
 3. (a) À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre n appliquée à la fonction exponentielle, montrer que pour tout $x \in \left[-\frac{1}{e}, 0\right]$ et tout entier naturel n :

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}.$$

- (b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |I - S_n| \leq \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}.$$

- (c) Montrer que :

$$I = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}.$$

- (d) Écrire une fonction Python appelée `estimation` qui prend comme paramètre d'entrée un réel strictement positif ε noté `eps` et qui renvoie en sortie une valeur approchée de I à ε près.