Correction des exercices du TD 23

Table des matières

1 Exercice 4

Soit $M \in [1;+\infty[$, calculons la valeur de l'intégrale

$$\int_1^M \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Pour cela, calculons une primitive de la fonction $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$. Remarquons que :

$$\frac{ln(x)}{x} = \frac{1}{x} \times \ln(x).$$

Ainsi f semble être de la forme $u'u$ avec $u(x) = \ln(x)$. Or $u'(x) = \dfrac{1}{x}$. On a donc :

$$u'u = \frac{1}{x}\ln(x) = f(x).$$

Ainsi une primitive de f est donnée par :

$$F(x) = \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}(\ln(x))^2.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_1^M \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{2}\ln(x)^2\right]_1^M \\ &= \frac{1}{2}\ln(M)^2 - \frac{1}{2}\ln(1)^2 \\ &= \frac{1}{2}\ln(M)^2.\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{M\to+\infty} \ln(M)^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{M\to+\infty} \displaystyle\int_1^M \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = +\infty$ ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ diverge.

2 Exercice 5

La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est continue sur $]0,1]$ donc l'intégrale est impropre en 0. Posons $0 < m < 1$ et calculons $\displaystyle\int_m^1 \ln(t)\mathrm{d}t$.

Pour cela effectuons une intégration par parties. Posons $\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = \ln(t) \end{cases}$ alors $\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = \dfrac{1}{t} \end{cases}$. On a alors :

$$\begin{aligned}\int_m^1 \ln(t)\mathrm{d}t &= [t\ln(t)]_m^1 - \int_m^1 t \times \frac{1}{t}\mathrm{d}t \\ &= -m\ln(m) - (1-m) \\ &= m - m\ln(m) - 1\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{m\to 0} m\ln(m) = 0$ par croissance comparée donc :

$$\lim_{m\to 0} \int_m^1 \ln(t)\mathrm{d}t = -1$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ est donc convergente et vaut 1.

3 Exercice 8

1. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x(1+x)^2}$ est continue sur $[1,+\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$. La fonction intégrée est positive et on a au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{1}{x(1+x)^2} \sim \frac{1}{x^3}.$$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$ est une intégrale de Riemann convergente car $3 > 1$. Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x)^2}\mathrm{d}x$ est convergente.

2. Commençons par chercher trois réels a, b et c tels que :

$$\forall x \geqslant 1, \quad \frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{(1+x)^2}.$$

En mettant le membre de droite au même dénominateur, on a :

$$\begin{aligned}\frac{a}{x} + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{(1+x)^2} &= \frac{a(1+x)^2 + bx(1+x) + cx}{x(1+x)^2} \\ &= \frac{a + 2ax + ax^2 + bx + bx^2 + cx}{x(1+x)^2} \\ &= \frac{(a+b)x^2 + (2a+b+c)x + a}{x(1+x)^2}\end{aligned}$$

On procède alors par identification pour obtenir l'égalité, il faut

$$a = 1, \quad 2a + b + c = 0, \quad a + b = 0.$$

Ainsi on a :

$$a = 1, \quad b = -a = -1, \quad c = -2a - b = -2 + 1 = -1.$$

Ainsi

$$\forall x \geqslant 1, \quad \frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{-1}{1+x} + \frac{-1}{(1+x)^2}.$$

3. Soit $M \in [1; +\infty[$, calculons la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_1^M \frac{1}{x(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$. Pour cela, calculons une primitive de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x(1+x)^2}$. D'après ce qui précède, on a :

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}.$$

Il nous faut donc calculer une primitive des trois termes composant f.

(a) Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est donnée par $x \mapsto \ln(x)$.

(b) La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ est de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = 1 + x$. Ainsi une primitive est donnée par $x \mapsto \ln|1+x|$.
Une primitive de la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{1+x}$ est donc donnée par $x \mapsto -\ln|1+x|$.

(c) La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)^2}$ est de la forme $u'u^\alpha$ avec $u(x) = 1 + x$ et $\alpha = -2$. Ainsi une primitive est donnée par $x \mapsto \dfrac{1}{-2+1}(1+x)^{-2+1} = -\dfrac{1}{1+x}$.
Une primitive de la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{(1+x)^2}$ est donc donnée par $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$.

Ainsi une primitive de f est donnée par :

$$F(x) = \ln(x) - \ln|1+x| + \frac{1}{1+x}.$$

Nous pouvons alors calculer l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_1^M \frac{1}{x(1+x)^2}\,\mathrm{d}x &= \left[\ln(x) - \ln|1+x| + \frac{1}{1+x}\right]_1^M \\ &= \ln(M) - \ln|1+M| + \frac{1}{1+M} - \ln(1) + \ln|1+1| - \frac{1}{1+1} \\ &= \ln(M) - \ln(1+M) + \frac{1}{1+M} + \ln(2) - 1 \\ &= \ln\left(\frac{M}{1+M}\right) + \frac{1}{1+M} + \ln(2) - 1\end{aligned}$$

Il nous reste alors à calculer la limite du terme $\ln\left(\frac{M}{1+M}\right)+\frac{1}{1+M}+\ln(2)-1$. A priori, la limite du terme $\ln\left(\frac{M}{1+M}\right)$ est une forme indéterminée. Remarquons que

$$\ln\left(\frac{M}{1+M}\right)=-\ln\left(\frac{1+M}{M}\right)=-\ln\left(1+\frac{1}{M}\right)$$

On en déduit donc par composée de limites que $\lim\limits_{M\to+\infty}\ln\left(\frac{M}{1+M}\right)=-\ln(1)=0$. Or $\lim\limits_{M\to+\infty}\frac{1}{1+M}=0$, ainsi

$$\lim_{M\to+\infty}\ln\left(\frac{M}{1+M}\right)+\frac{1}{1+M}+\ln(2)-1=\ln(2)-1.$$

En conclusion,

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x)^2}\,\mathrm{d}x=\ln(2)-1.$$

4 Exercice 9

1.
2.
3. Soit $M\in[0;+\infty[$, calculons l'intégrale $\int_0^M x^3\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. Pour cela, effectuons une intégration par parties. Commençons par remarquer que :

$$x^3\mathrm{e}^{-x^2}=x^2\times x\mathrm{e}^{-x^2}$$

Posons $\begin{cases}u'(x)=x\mathrm{e}^{-x^2}\\ v(x)=x^2\end{cases}$ alors $\begin{cases}u(x)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\\ v'(x)=2x\end{cases}$.

Par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^M x^3\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x&=\int_0^M u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x\\&=[u(x)v(x)]_0^M-\int_0^M u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x\\&=\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}x^2\right]_0^M-\int_0^M-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\times 2x\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{2}M^2\mathrm{e}^{-M^2}+\int_0^M x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{2}M^2\mathrm{e}^{-M^2}+\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\right]_0^M\\&=-\frac{1}{2}M^2\mathrm{e}^{-M^2}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-M^2}+\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{M\to+\infty}\mathrm{e}^{-M^2}=0$ et par croissance comparée, $\lim\limits_{M\to+\infty}M^2\mathrm{e}^{-M^2}=0$ donc

$$\lim_{M\to+\infty}\frac{1}{2}M^2\mathrm{e}^{-M^2}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-M^2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Ainsi l'intégrale $\int_0^{+\infty}x^3\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge et

$$\int_0^{+\infty}x^3\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

5 Exercice 13

1. La fonction $x\mapsto\frac{(x-1)^n}{x^{n+2}}\mathrm{d}x$ est continue sur $[1,+\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$. On a au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{(x-1)^n}{x^{n+2}}\sim\frac{x^n}{x^{n+2}}\sim\frac{1}{x^2}.$$

La fonction intégrée est positive et on sait que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ converge car c'est une intégrale de Riemann avec $2 > 1$. Ainsi l'intégrale I_n converge.

2. Posons la fonction $u : [1, +\infty[\longmapsto]0, 1]$ définie par $u(x) = \frac{1}{x}$. La fonction u est strictement décroissante de $[1, +\infty[$ sur $]0, 1]$ et continue donc réalise une bijection entre ses deux espaces. De plus, elle est dérivable sur $[1, +\infty[$. On peut donc poser le changement de variables $t = u(x)$. On a alors :
   - $x = \frac{1}{t}$
   - $\mathrm{d}t = -\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$
   - Si $x = 1$, $t = 1$ et si $x \to +\infty$, $t \to 0$.

   Comme on sait que I_n converge, on peut déjà écrire que :
$$I_n = \int_1^{+\infty} (x-1)^n \times \left(\frac{1}{x}\right)^n \times \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \int_1^0 \left(\frac{1}{t} - 1\right)^n \times t^n \times (-\mathrm{d}t) = \int_0^1 (1-t)^n \mathrm{d}t$$
   L'intégrale obtenue n'est plus impropre car la fonction $t \mapsto (1-t)^n$ est continue sur $[0, 1]$. On a alors :
$$I_n = \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

6 Exercice 14

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto t^n \mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$. On a au voisinage de $+\infty$:
$$t^n \mathrm{e}^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$
   En effet, par croissance comparée,
$$\lim_{t\to+\infty} \frac{t^n \mathrm{e}^{-t}}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to+\infty} t^{n+2}\mathrm{e}^{-t} = 0.$$
   La fonction intégrée est positive et on sait que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge car c'est une intégrale de Riemann avec $2 > 1$. Ainsi l'intégrale J_n converge.

2. Soit $M > 0$, effectuons une intégration par parties sur l'intégrale $\int_1^M t^{n+1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

   Posons $\begin{cases} u'(t) = \mathrm{e}^{-t} \\ v(x) = t^{n+1} \end{cases}$ alors $\begin{cases} u(x) = -\mathrm{e}^{-t} \\ v'(x) = (n+1)t^n \end{cases}$.

   Par intégration par parties :
$$\begin{aligned}\int_0^M t^{n+1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t &= \left[t^{n+1}(-\mathrm{e}^{-t})\right]_0^M - \int_0^M (-\mathrm{e}^{-t})(n+1)t^n\mathrm{d}t \\ &= -M^{n+1}\mathrm{e}^{-M} + (n+1)\int_0^M t^n\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\end{aligned}$$
   Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, J_n converge, on a :
$$\lim_{M\to+\infty} \int_0^M t^{n+1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = J_{n+1}$$
   et
$$\lim_{M\to+\infty} \int_0^M t^n\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = J_n.$$
   De plus, $\lim_{M\to+\infty} -M^{n+1}\mathrm{e}^{-M} = 0$ par croissance comparée. Ainsi :
$$J_{n+1} = (n+1)J_n.$$

3. On conjecture que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n = n!$. Démontrons-le par récurrence. Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $J_n = n!$ ».

Initialisation $(n=0)$ $J_0 = \displaystyle\int_1^{\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$. Or

$$\int_1^{\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \lim_{M\to+\infty} \int_0^{M} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \lim_{M\to+\infty} -\mathrm{e}^{-M} + 1 = 1.$$

De plus, $0! = 1$. Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a :

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= (n+1)J_n \quad \text{d'après la question précédente} \\ &= (n+1)n! \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= (n+1)! \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}$, $J_n = n!$.