Intégrales généralisées

Exercice 1 (♣)

Etudier la nature des intégrales impropres suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{1+t^5}\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-3t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{5x}}\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^5}{e^t}\,\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$
7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x(x-1)}\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^3}\mathrm{d}t$

Exercice 2 (♣)

Etudier la nature des intégrales impropres suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{(1-t)^3}}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} t+2-\sqrt{t^2+4t+1}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{e^x-\sqrt{1+2x}}$

Exercice 3 (♠)

Etudier la nature des intégrales impropres suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\ln(t)^2}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\exp^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t-1}$

Exercice 4 (♥)

Montrer que l'intégrale généralisée

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x$$

diverge.

Exercice 5 (♥)

Etudier la nature de l'intégrale généralisée

$$\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 6 (♣)

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour la convergence de l'intégrale impropre

$$\int_0^{+\infty} \frac{t-\sin(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t.$$

Exercice 7 (♣)

Calculer les intégrales suivantes après avoir démontré leur existence.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+1)(t+2)}\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^3}\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(u+1)^2}\,\mathrm{d}u$
5. $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t,$
6. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$

Exercice 8 (♥)

1. Etudier la nature de l'intégrale généralisée :
$$I=\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x)^2}\mathrm{d}x.$$
2. Déterminer trois réels a, b et c tels que :
$$\forall x \geq 1 \qquad \frac{1}{x(1+x)^2}=\frac{a}{x}+\frac{b}{1+x}+\frac{c}{(1+x)^2}.$$
3. En déduire la valeur de l'intégrale I.

Exercice 9 (♣)

Calculer les intégrales suivantes en effectuant une intégration par parties.
On n'oubliera pas de justifier avec soin leur existence.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{\left(t^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^3\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$

♣ Du trèfle à brouter…
♥ À connaître par coeur.
♠ Qui s'y frotte s'y pique !
♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau !

Exercice 10 (♠)

Calculer les intégrales suivantes en effectuant une intégration par parties.
On n'oubliera pas de justifier avec soin leur existence.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) \mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln\left(1-x^2\right)}{x^2} \mathrm{d}x$

Exercice 11 (♠ ♦)

Justifier l'existence et calculer l'intégrale suivante, grâce à des intégrations par parties.

$$I = \int_0^1 (x\ln(x))^n \,\mathrm{d}x.$$

Exercice 12 (♣)

Justifier l'existence et calculer les intégrales suivantes via les changements de variables indiqués.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\left(\mathrm{e}^t+1\right)\left(\mathrm{e}^{-t}+1\right)}$ avec $u = \mathrm{e}^t$,
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} \,\mathrm{d}t$ avec $u = \sqrt{t}$,
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{(1+t)^2} \,\mathrm{d}t$ avec $u = \dfrac{1}{t}$,
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\mathrm{e}^t+1}}$ avec $u = \sqrt{\mathrm{e}^t+1}$.

Exercice 13 (♥)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{x^{n+2}} \mathrm{d}x$.

1. Montrer que l'intégrale I_n converge.
2. En procédant au changement de variable $t = \dfrac{1}{x}$, calculer l'intégrale I_n.

Exercice 14 (♥)

Soient $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$J_n = \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l''intégrale J_n converge. converge.
2. Déterminer une relation entre J_{n+1} et J_n.
3. En déduire l'expression de J_n en fonction de n.

Exercice 15 (♠)

On pose pour $x \geq 0$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-xt)\frac{\sin t}{t} \,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est bien définie sur $]0,+\infty[$.
2. Prouver l'existence de $f(0)$ (on pourra intégrer par parties).

Exercice 16 (♠)

Soit $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(nt)}{\left(t^2+t+1\right)^n} \,\mathrm{d}t$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que la suite (I_n) est bien définie.