Correction des exercices du TD 22

Table des matières

1 Exercice 4

1. Si P est le polynôme nul alors le résultat est immédiat. Sinon notons $p = \deg(P)$ et $q = \deg(Q)$ ainsi que $a_p \neq 0$ le coefficient dominant de P et $b_q \neq 0$ le coefficient dominant de Q. On a alors :

$$P(x) \underset{+\infty}{\sim} a_p x^p \quad \text{et} \quad Q(x) \underset{+\infty}{\sim} b_q x^q$$

Ainsi on a :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{a_p x^p}{b_q x^q} = \frac{a_p}{b_q} x^{p-q}$$

Comme $p < q$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{a_p}{b_q} x^{p-q} = 0$. Ainsi $P(x) \underset{+\infty}{=} o(Q(x))$.

2. Notons $P(x) = \sum\limits_{k=p_1}^{p_2} a_k x^k$ et $Q(x) = \sum\limits_{k=q_1}^{q_2} b_k x^k$ avec p_1, p_2, q_1, q_2 des entiers et (a_k), (b_k) des réels.

Pour que $Q(x) \underset{0}{=} o(P(x))$ il faut et suffit que $q_1 > p_1$. En effet, supposons $q_1 > p_1$ alors :

$$P(x) \underset{0}{\sim} a_{p_1} x^{p_1} \quad \text{et} \quad Q(x) \underset{0}{\sim} b_{q_1} x^{q_1}$$

Ainsi on a :

$$\frac{Q(x)}{P(x)} \underset{0}{\sim} \frac{b_{q_1} x^{q_1}}{a_{p_1} x^{p_1}} = \frac{b_{q_1}}{a_{p_1}} x^{q_1 - p_1}$$

Comme $q_1 - p_1 >$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{b_{q_1}}{a_{p_1}} x^{q_1 - p_1} = 0$. Ainsi $Q(x) \underset{0}{=} o(P(x))$.

Réciproquement si $Q(x) \underset{0}{=} o(P(x))$ cela signifie que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{Q(x)}{P(x)} = 0$, or :

$$\frac{Q(x)}{P(x)} \underset{0}{\sim} \frac{b_{q_1} x^{q_1}}{a_{p_1} x^{p_1}} = \frac{b_{q_1}}{a_{p_1}} x^{q_1 - p_1}$$

Ce terme ne tend vers 0 que si $q_1 - p_1 > 0$ i.e. $q_1 > p_1$.