

Relations de comparaisons entre fonctions

Exercice 1 (♣)

Déterminer des équivalents simples au voisinage de $+\infty$ des fonctions suivantes :

- $\ln(x+3) - \ln(x)$
- $\frac{x^3 + \ln(x)}{3^x + 2^x}$
- $e^{\frac{1}{x+1}} - 1$
- $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}$
- $\ln\left(\frac{x^2-x-1}{x^2-1}\right)$
- $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$
- $\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} - 1$
- $e^{\frac{x}{x^2+1}} - \frac{x+1}{x+2}$
- $x \ln(x+1) - (x+1) \ln(x)$

Exercice 2 (♣)

Déterminer des équivalents simples au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

- $\frac{x^2 + \ln(x)}{2^x + 1}$
- $\ln(1 + \sin(x))$
- $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{1-x^2}$
- $e^{3x} - 1 + 2x^2$
- $\tan(x) - \sin(x)$
- $e^x + x - 1$
- $\frac{\ln(\cos(x^2))}{\sin(x)^3}$
- $\ln\left(\frac{1+x+x^2}{1-2x}\right)$
- $x^x - 1$

Exercice 3 (♣)

Étudier les limites des fonctions suivantes :

- $\frac{xe^{-x} + x^2}{x - \ln(x)}$ en $+\infty$
- $\frac{\cos(2x) - 1}{\tan(3x)^2}$ en 0
- $\frac{x \ln(x) - x}{x + \cos(x)}$ en $+\infty$
- $\ln(x) \ln(1-x)$ en 1^-

- $\frac{\ln(x)}{x^2-1}$ en 1
- $\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^x$ en $+\infty$
- $\frac{\sqrt{xe^x - x^2}}{e^x + e^{-x}}$ en $+\infty$
- $\frac{x + \sin(x)}{x \ln(x)}$ en 0
- $\frac{\tan(2x)}{\sin(x)}$ en 0
- $\frac{\sin(x) - \sin(3x)}{\sin(4x)}$ en 0
- $\frac{\tan(a)}{\tan(bx)}$ avec $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ en 0
- $\frac{\sin^2(x)}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0

Exercice 4 (♠)

Soient P et Q deux polynômes réels vérifiant $\deg(P) < \deg(Q)$.
Montrer qu'alors

$$P(x) \underset{+\infty}{=} o(Q(x)) \quad \text{et} \quad Q(x) \underset{0}{=} o(P(x)).$$

♣ Du trèfle à brouter...
♥ À connaître par coeur.

♠ Qui s'y frotte s'y pique!
♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau!