Correction des exercices du TD 21

Table des matières

1 Exercice 1

1. Le premier 1 apparaît au i-ème lancer signifie qu'aux lancers 1,2,3,...,$i-1$; on n'a pas eu de 1. Ne pas avoir de 1 au j-ème lancer correspond à l'événement $\overline{A}_j$. Ainsi

$$B = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \ldots \cap \overline{A}_{i-1} \cap A_i.$$

2. Au moins un des résultats est un 1 signifie soit il y a eu un 1 au premier lancer ou un 1 au deuxième lancer ou un 1 au troisième lancer etc
Les "ou" se traduisent par des unions, ainsi :

$$C = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

3. Aucun lancer ne donne un 1 signifie qu'on n'a pas de 1 au premier lancer (c'est à dire $\overline{A}_1$) et pas de 1 au deuxième lancer (c'est à dire $\overline{A}_2$) et pas de 1 au troisième lancer (c'est à dire $\overline{A}_3$) etc
Les "et" se traduisent par des intersections, ainsi :

$$D = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \ldots = \bigcap_{i=1}^{+\infty} \overline{A}_i.$$

On peut remarquer que $D = \overline{C}$ car le contraire de "au moins un" est "aucun". On a donc :

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{+\infty} \overline{A}_i$$

2 Exercice 2

Comme P est une probabilité sur $\mathbb{N}$, on a $P(\mathbb{N}) = 1$. Or on peut écrire que $\mathbb{N} = \bigcup_{n \geqslant 0} \{n\}$. On a alors :

$$P(\mathbb{N}) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(\{n\}) \quad \text{et donc} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} P(\{n\}) = 1.$$

La série $\sum_{n \geqslant 0} P(\{n\})$ est donc une série convergente car on vient de montrer que la limite de la somme de cette série valait 1. Ainsi son terme général tend vers 0, c'est à dire :

$$\lim_{n \to +\infty} P(\{n\}) = 0.$$

3 Exercice 3

1. On cherche $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $P(\mathbb{N}) = 1$. On a :

$$P(\mathbb{N}) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(\{n\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n-2}c}{(n+1)!}$$

Or on a, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{3^{k-2}c}{(k+1)!} = c3^{-3} \sum_{k=0}^{n} \frac{3^{k+1}}{(k+1)!} = c3^{-3} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{3^k}{k!} = \frac{c}{27} \left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{3^k}{k!} - 1 \right)$$

On reconnaît la somme partielle de la série exponentielle, on a donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n-2}c}{(n+1)!} = \frac{c}{27} \left(\mathrm{e}^3 - 1 \right).$$

On doit donc poser $c = \dfrac{27}{\mathrm{e}^3 - 1}$ pour que P définisse une probabilité.

2. On cherche $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $P(\mathbb{N}) = 1$.
   La première idée naturelle est d'écrire que $\mathbb{N} = \bigcup_{n \geqslant 0} \{n, n+1\}$. Bien que juste, cette égalité ne nous permet pas d'avancer car les événements de cette union ne sont pas incompatibles.
   Ecrivons plutôt que : $\mathbb{N} = \bigcup_{n \geqslant 0} \{2n, 2n+1\}$. Les événements de cette union sont bien incompatibles et on a alors :
   $$P(\mathbb{N}) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(\{2n, 2n+1\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-2n} c = c \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = c\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right) = c\frac{4}{3}.$$
   On doit donc poser $c = \dfrac{3}{4}$ pour que P définisse une probabilité.

4 Exercice 4

Il s'agit d'un exercice de probabilités conditionnelles.
Commençons par introduire quelques notations pour les différents événements de l'exercice. On note
- U_k l'événement « piocher une boule dans l'urne numéro k ». L'indice k varie donc de 1 à n.
- B_1 l'événement « la première boule tirée est blanche ».
- B_2 l'événement « la deuxième boule tirée est blanche ».

1. On nous demande donc de calculer $P(B_1 \cap B_2)$.
   La famille d'événements $(U_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ forme un système complet d'événements. Ainsi d'après la formule des probabilités totales, on a :
   $$P(B_1 \cap B_2) = \sum_{k=1}^{n} P(U_k \cap (B_1 \cap B_2)),$$
   ce qui s'écrit d'après la formule des probabilités composées (car $P(U_k) = \dfrac{1}{n} \neq 0$ pour tout k) :
   $$P(B_1 \cap B_2) = \sum_{k=1}^{n} P(U_k) P_{U_k}(B_1 \cap B_2).$$
   On a $P(U_k) = \dfrac{1}{n}$ car on choisit de manière équiprobable une des n urnes. Il reste donc à calculer $P_{U_k}(B_1 \cap B_2)$. En appliquant, de nouveau la formule des probabilités composées, on a :
   $$P_{U_k}(B_1 \cap B_2) = P_{U_k}(B_1) P_{U_k \cap B_1}(B_2)$$
   Il y a k boules blanches dans l'urne k, ainsi
   $$P_{U_k}(B_1) = \frac{k}{n}.$$
   Puis ayant déjà pioché une boule blanche dans l'urne k, on a :
   $$P_{U_k \cap B_1}(B_2) = \frac{k-1}{n-1}$$
   On a donc :
   $$P_{U_k}(B_1 \cap B_2) = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}.$$
   Ainsi
   $$P(B_1 \cap B_2) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{k(k-1)}{n(n-1)}.$$

Il nous reste donc plus qu'à calculer cette somme, on a :

$$\begin{aligned}
P(B_1 \cap B_2) &= \frac{1}{n^2(n-1)} \sum_{k=1}^{n} k(k-1) \\
&= \frac{1}{n^2(n-1)} \sum_{k=1}^{n} k^2 - k \\
&= \frac{1}{n^2(n-1)} \sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{1}{n^2(n-1)} \sum_{k=1}^{n} k \\
&= \frac{1}{n^2(n-1)} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) - \frac{1}{n^2(n-1)} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) \\
&= \frac{n(n+1)}{n^2(n-1)} \left(\frac{2n+1}{6} - \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{n+1}{n(n-1)} \left(\frac{2n+1-3}{6} \right) \\
&= \frac{n+1}{n(n-1)} \left(\frac{2n-2}{6} \right) \\
&= \frac{n+1}{n(n-1)} \left(\frac{2(n-1)}{6} \right) \\
&= \frac{n+1}{3n} \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{3n}
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{P(B_1 \cap B_2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3n}}$.

2. Le début du raisonnement reste le même et on obtient la formule suivante à l'aide de la formule des probabilités totales et celle des probabilités composées :

$$P(B_1 \cap B_2) = \sum_{k=1}^{n} P(U_k) P_{U_k}(B_1 \cap B_2).$$

On a toujours $P(U_k) = \frac{1}{n}$, ce qui change c'est le calcul de $P_{U_k}(B_1 \cap B_2)$.
Effectuant un tirage avec remise, les pioches des boules sont indépendantes, ainsi :

$$P_{U_k}(B_1 \cap B_2) = P_{U_k}(B_1) P_{U_k}(B_2) = \frac{k}{n} \times \frac{k}{n} = \frac{k^2}{n^2}.$$

Ainsi

$$P(B_1 \cap B_2) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{k^2}{n^2}.$$

Il nous reste donc plus qu'à calculer cette somme, on a :

$$\begin{aligned}
P(B_1 \cap B_2) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3} \\
&= \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&= \frac{1}{n^3} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{P(B_1 \cap B_2) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}}$.

3. Dans le premier cas, on a de façon immédiate

$$\lim_{n\to+\infty} P(B_1\cap B_2)=\frac{1}{3}.$$

Dans le deuxième cas, on est en présence, a priori, d'une forme indéterminée, développons le numérateur puis factorisons-le par n^2, on a :

$$P(B_1\cap B_2)=\frac{2n^2+3n+1}{6n^2}=\frac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{6}$$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} P(B_1\cap B_2)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

Remarque : Finalement lorsque n tend vers l'infini, le fait de tirer avec remise ou sans remise n'importe pas sur la valeur de $P(B_1\cap B_2)$.

5 Exercice 5

Pour répondre à la question, on peut modéliser l'énoncé de la manière suivante.

Tout d'abord, remarquons que la phrase « Les ECG1 sont les meilleurs, ils intégreront tous HEC ! » constitue un bloc de 54 caractères.

L'astuce est donc de voir la suite infinie de caractères comme une suite infinie de blocs de 54 caractères. Introduisons alors les événements suivants :

- B : « le bloc de 54 caractères forme la phrase : Les ECG1 sont les meilleurs, ils intégreront tous HEC ! »
- A_n : « le bloc de 54 caractères formant la phrase : Les ECG1 sont les meilleurs, ils intégreront tous HEC ! est obtenu pour la première fois lors de la saisie du n-ème bloc »
- A : « le singe écrit la phrase : Les ECG1 sont les meilleurs, ils intégreront tous HEC ! »

Pour que l'événement A soit réalisé, il faut qu'il existe un entier $n\in\mathbb{N}^*$ tel que le singe saisisse le bloc de 54 caractères formant la phrase : Les ECG1 sont les meilleurs, ils intégreront tous HEC ! pour la première fois lors de la saisie du n-ème bloc. Ainsi $A=\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$.

On a alors d'après le corollaire du théorème de la limite monotone que :

$$P(A)=\lim_{n\to+\infty} P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big)$$

Les événements (A_n) sont incompatibles deux à deux donc :

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big)=\sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

Or, on remarque que $P(A_k)=\left(P(\overline{B})\right)^{k-1}P(B)$. Or $P(B)=\left(\frac{1}{50}\right)^{54}$ car les saisies sont indépendantes les unes des autres. Notons $p=\frac{1}{50^{54}}\in]0,1[$. Ainsi, on a :

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big)=\sum_{k=1}^{n}(1-p)^{k-1}p=p\sum_{i=0}^{n-1}(1-p)^i=p\times\frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)}=1-(1-p)^n$$

Comme $1-p\in]0,1[$, $\lim_{n\to+\infty} 1-(1-p)^n=1$ ainsi

$$P(A)=1$$

et donc presque-sûrement, le singe écrira la phrase « Les ECG1 sont les meilleurs, ils intégreront tous HEC ! ».

6 Exercice 6

L'événement A_n est « obtenir **au moins** une fois pile au cours des n premiers lancers ». Il est compliqué de calculer de manière directe la probabilité d'un événement où il y a du "au moins une fois". L'astuce classique consiste à calculer la probabilité de l'événement contraire $\overline{A_n}$. En effet, ici on a :

$\overline{A_n}$ = « n'obtenir aucun pile au cours des n premiers lancers » = « n'obtenir que des faces au cours des n premiers lancers ».

Or la probabilité d'obtenir face est $1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$, en supposant que tous les lancers sont indépendants, on a donc :

$$P(\overline{A_n})=\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

On en déduit alors pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$P(A_n)=1-P(\overline{A_n})=1-\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

L'événement B est « avoir au moins une fois pile ». Cela signifie qu'il existe un entier n tel qu'on obtienne au moins un pile au cours des n premiers lancers. On a donc :

$$B=\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}A_n.$$

Ainsi

$$P(B)=P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}A_n).$$

Or la famille $(A_n)_n$ est une famille croissante d'événements. En effet, si on a au moins un pile au cours des n premiers lancers, il est clair qu'on en a au moins aussi un au cours des $n+1$ premiers lancers, cela signifie que :

$$A_n\subset A_{n+1}$$

et donc la famille $(A_n)_n$ est une famille croissante d'événements. Ainsi d'après le théorème de la limite monotone, on a :

$$P(B)=P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}A_n)=\lim_{n\to+\infty}P(A_n)=\lim_{n\to+\infty}1-\left(\frac{2}{3}\right)^n=1$$

car $\dfrac{2}{3}\in]-1;1[$.
Ainsi $P(B)=1$ et donc l'événement B est presque-sûr.

7 Exercice 7

1. L'événement B est « ne jamais obtenir 1 », pour ce faire il faut « ne pas obtenir 1 au cours du 1er lancer » **et** « ne pas obtenir 1 au cours des 2 premiers lancers » **et** « ne pas obtenir 1 au cours des 3 premiers lancers » **et** ...... **et** « ne pas obtenir 1 au cours des n premiers lancers » **et** ......
   Le **et** se traduit mathématiquement par des intersections, ainsi :
   $$B=\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}A_n.$$
2. Non c'est une suite décroissante d'événements. En effet, si on n'a pas obtenu de 1 au cours des $n+1$ premiers lancers alors il est évident qu'on n'a pas obtenu de 1 au cours des n premiers lancers, ainsi
   $$A_{n+1}\subset A_n$$
   et donc la famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille décroissante d'événements.
3. La probabilité de ne pas avoir 1 est $1-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}$, de plus les lancers sont indépendants, ainsi pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a :
   $$P(A_n)=\left(\frac{5}{6}\right)^n.$$
4. On a
   $$P(B)=P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}A_n\right)$$
   Or la famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille décroissante d'événements donc d'après le théorème de la limite monotone, on a :
   $$P(B)=\lim_{n\to+\infty}P(A_n)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n=0\quad\text{car }\frac{5}{6}\in]-1;1[.$$
   On a $\boxed{P(B)=0}$ et donc l'événement B est négligeable.

8 Exercice 8

1. Pour k dans $\mathbb{N}^*$, on note G_k l'événement : « le joueur gagne la k-ième partie ».
Rappel : lorsqu'un événement comporte du " au moins une fois", il faut passer par l'événement contraire pour calculer sa probabilité.
$\overline{A_n}$ est l'événement : « au cours des n premières parties, le joueur ne gagne jamais ».
Alors $\overline{A_n} = \overline{G_1} \cap \overline{G_2} \cap \ldots \cap \overline{G_n}$ donc
$$P(\overline{A_n}) = P(\overline{G_1} \cap \overline{G_2} \cap \ldots \cap \overline{G_n})$$
Or, les événements $\overline{G_1}$, $\overline{G_2}$, ..., $\overline{G_n}$ sont mutuellement indépendants donc
$$P(\overline{A_n}) = P(\overline{G_1}) \times P(\overline{G_2}) \times \ldots \times P(\overline{G_n}) = \left(\frac{36}{37}\right)^n$$
et par conséquent :
$$P(A_n) = 1 - P(\overline{A_n}) = 1 - \left(\frac{36}{37}\right)^n$$

2. L'événement A est : « le joueur gagne au moins une fois » c'est à dire qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que l'événement A_n soit réalisé. Cela s'écrit :
$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n.$$
On a donc
$$P(A) = P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n\right)$$
Or il est clair que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, si l'événement A_n est réalisé, alors l'événement A_{n+1} est réalisé. Autrement dit, on a $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ c'est à dire la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante. Le théorème de la limite monotone s'applique et on peut écrire :
$$P(A) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \to +\infty} P(A_n)$$
Or, d'après la question précédente, $P(A_n) = 1 - \left(\frac{36}{37}\right)^n$. Or, $\frac{36}{37} \in]-1;1[$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{36}{37}\right)^n = 0$ d'où sans peine $\lim\limits_{n \to +\infty} P(A_n) = 1$ et on peut conclure que $\boxed{P(A) = 1}$.

3. D'après ce qui précède, $P(A) = 1$ donc l'événement A est presque sûr : autrement dit, le joueur misera presque sûrement sur le bon numéro.

9 Exercice 9

1. (a) Pour k dans $\mathbb{N}^*$, on note B_k l'événement : « on obtient la boule blanche au k-ième tirage ».
On a $E_1 = B_1$, on a $E_2 = \overline{B_1} \cap B_2$ et pour $n \geqslant 3$, on a :
$$E_n = \overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \ldots \cap \overline{B_{n-1}} \cap B_n$$
donc
$$P(E_n) = P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \ldots \cap \overline{B_{n-1}} \cap B_n)$$
Les tirages sont indépendants et on peut écrire :
$$P(E_n) = P(\overline{B_1}) \times P(\overline{B_2}) \times \ldots \times \ldots \times P(\overline{B_{n-1}}) \times P(B_n) = \left(\prod_{k=1}^{n-1} P(\overline{B_k})\right) P(B_n)$$
Or $P(\overline{B_k}) = \dfrac{k}{k+1}$ et $P(B_n) = \dfrac{1}{n+1}$ donc
$$P(E_n) = \left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k+1}\right) \frac{1}{n+1} = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} k}{\prod_{k=1}^{n-1} (k+1)} \times \frac{1}{n+1} = \frac{(n-1)!}{n!} \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}.$$
Remarque : Si vous avez du mal à comprendre le raisonnement, essayez d'abord de calculer $P(E_1)$, $P(E_2)$ et $P(E_3)$.

(b) On part de l'expression de droite et on met les termes au même dénominateur, on obtient :

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n+1}=\frac{(a+b)n+a}{n(n+1)}$$

On identifie alors les coefficients et on obtient $a=1$ et $a+b=0$ soit $a=1$ et $b=-1$.

(c) Notons E : « on obtient au moins une boule blanche ». Alors $E=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} E_n$.

$$P(E)=P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} E_n\right).$$

D'après le corollaire du théorème de la limite monotone, on a :

$$P(E)=\lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right).$$

Or les événements (E_n) sont incompatibles donc :

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right)=\sum_{k=1}^{n} P(E_k)$$

D'après la question précédente, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} P(E_k)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1} \qquad \text{somme télescopique}$$

Ainsi

$$P(E)=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

On a donc $\boxed{P(E)=1}$: on obtient presque sûrement au moins une boule blanche.

2. (a) Pour k dans $\mathbb{N}^*$, on note N_k l'événement : « on obtient une boule noire au k-ième tirage ».
On a $F_1=N_1$, on a $F_2=\bar{N}_1\cap N_2$ et pour $n\geqslant 3$, on a :

$$F_n=\overline{N_1}\cap\overline{N_2}\cap\ldots\cap\overline{N_{n-1}}\cap N_n$$

soit encore

$$F_n=B_1\cap B_2\cap\ldots\cap B_{n-1}\cap N_n$$

donc

$$P(F_n)=P(B_1\cap B_2\cap\ldots\cap B_{n-1}\cap N_n)$$

Les tirages étant indépendants, on a :

$$P(F_n)=\left(\prod_{k=1}^{n-1} P(B_k)\right)P(\overline{B_n}).$$

donc

$$P(F_n)=\left(\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}\right)\times\frac{n}{n+1}=\frac{n}{n!(n+1)}=\frac{n}{(n+1)!}$$

Or,

$$\frac{n}{(n+1)!}=\frac{n+1-1}{(n+1)!}=\frac{n+1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}.$$

donc on a bien :

$$P(F_n)=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}.$$

(b) Notons F : « on obtient au moins une boule noire ». Alors $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n$. Ainsi :

$$P(F) = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n\right).$$

D'après le corollaire du théorème de la limite monotone, on a :

$$P(F) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=1}^{n} F_k\right).$$

Or les événements (F_n) sont incompatibles donc :

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} F_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(F_k)$$

D'après la question précédente, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} P(F_k) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \qquad \text{somme télescopique}$$

Ainsi

$$P(F) = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{(n+1)!}\right) = 1.$$

On a donc $\boxed{P(F) = 1}$: on obtient presque sûrement au moins une boule noire.

10 Exercice 10

1. A_n et $\overline{A_n}$ forment un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(E_n) = P(A_n \cap E_n) + P(\overline{A_n} \cap E_n),$$

Cela s'écrit à l'aide de la formule des probabilités composées :

$$P(E_n) = P(A_n)P_{A_n}(E_n) + P(\overline{A_n})P_{\overline{A_n}}(E_n).$$

D'après l'énoncé, $P_{A_n}(E_n) = a$ et $P_{\overline{A_n}}(E_n) = b$ donc

$$P(E_n) = aP(A_n) + bP(\overline{A_n})$$

Puisque $P(\overline{A_n}) = 1 - P(A_n)$, on obtient finalement :

$$P(E_n) = (a-b)P(A_n) + b.$$

2. A_n et $\overline{A_n}$ forment un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P(\overline{A_n} \cap A_{n+1}).$$

Cela s'écrit à l'aide de la formule des probabilités composées :

$$P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n})P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$$

Sachant que le n-ième lancer se fait avec la pièce A, il se fera avec la pièce A au lancer suivant si et seulement si le n-ième lancer a donné PILE et donc :

$$P_{A_n}(A_{n+1}) = P_{A_n}(E_n) = a$$

Sachant que le n-ième lancer se fait avec la pièce B, il se fera avec la pièce A au lancer suivant si et seulement le n-ième lancer a donné FACE et donc :

$$P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = P_{\overline{A_n}}(\overline{E_n}) = 1 - P_{\overline{A_n}}(E_n) = 1 - b$$

Par conséquent :

$$P(A_{n+1}) = aP(A_n) + (1-b)P(\overline{A_n})$$

Puisque $P(\overline{A_n}) = 1 - P(A_n)$, on obtient finalement :

$$P(A_{n+1}) = (a+b-1)P(A_n) + (1-b)$$

3. Dans cette question, on sort du monde des probas et on entre dans celui des suites. Posons $u_n = P(A_n)$. L'objectif de cette question est de trouver l'expression de la suite (u_n) sachant qu'elle vérifie la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = (a+b-1)u_n + 1 - b.$$

Tout d'abord, remarquons qu'on a $a \in]0;1[$ et $b \in]0;1[$ donc $a+b-1 \in]-1;1[$ et en particulier, $a+b-1 \neq 1$. La suite (u_n) est donc arithmético-géométrique car $a+b-1 \neq 1$.
L'équation $x = (a+b-1)x + (1-b)$ a pour solution

$$x = \frac{1-b}{2-a-b}$$

Posons $w_n = u_n - \frac{1-b}{2-a-b}$. D'après le cours, la suite (w_n) est géométrique de raison $q = a+b-1$ donc $w_n = w_1 q^{n-1}$ c'est à dire

$$P(A_n) - \frac{1-b}{2-a-b} = \left(P(A_1) - \frac{1-b}{2-a-b}\right)(a+b-1)^{n-1}$$

Le choix de la pièce se fait au hasard pour le premier tirage donc $P(A_1) = \frac{1}{2}$ d'où après calculs :

$$P(A_n) = \frac{b-a}{2(2-a-b)}(a+b-1)^{n-1} + \frac{1-b}{2-a-b}$$

Enfin, d'après la question **1.** $P(E_n) = (a-b)P(A_n) + b$.

Remarque : on sait que $a+b-1 \in]-1;1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(a+b-1)^{n-1} = 0$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = \frac{1-b}{2-a-b}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} P(E_n) = \frac{(1-b)(a-b)}{2-a-b} + b$$

soit encore :

$$\lim_{n\to+\infty} P(E_n) = \frac{a+b-2ab}{2-a-b}$$

11 Exercice 11

Commençons par noter A l'événement « ne pas obtenir 6 ».
Notons ensuite pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, B_n l'événement « on obtient Pile pour la première fois au n-ème lancer » et on pose B_0 « ne pas obtenir du tout Pile ».
La famille $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements car les événements sont deux à deux incompatibles de plus $\Omega = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n$.
Ainsi d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B_n \cap A).$$

Or $P(B_0 \cap A) = 1$ car $P(B_0) = 0$ (cf Exemple 21.6 du cours) donc

$$P(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n \cap A),$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(B_n) = \left(\prod\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, en effet, les lancers sont indépendants et il faut faire $n-1$ face et 1 pile. De plus, la pièce est équilibrée. Comme $P(B_n) \neq 0$, on peut écrire :

$$P(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n)P_{B_n}(A) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

en effet, si B_n est réalisé, on lance n fois le dé, les lancers sont indépendants et la probabilité de ne pas avoir 6 à un lancer est de $\frac{5}{6}$. Ainsi $P_{B_n}(A) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$.
Ainsi

$$P(A) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{5}{12}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{5}{12}} - 1 = \frac{12}{7} - 1 = \frac{5}{7}$$

12 Exercice 14

1. On cherche $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $P(\mathbb{N}) = 1$. On a :

$$P(\mathbb{N}) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(\{n\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a\frac{2^n}{n!} = a\mathrm{e}^2.$$

On a donc $a = \mathrm{e}^{-2}$.

2. Notons X la variable aléatoire égale au nombre d'enfants par famille. D'après l'énoncé, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = p_n$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, notons Y_n la variable aléatoire égale au nombre de garçons dans une fratrie de n enfants. On a alors :

$$Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right).$$

En effet, appelons succès l'événement « l'enfant est un garçon ». Cet événement est de probabilité $\frac{1}{2}$, dans une fratrie de n enfants, on répète n fois l'expérience de Bernoulli de manière identique et indépendante et Y_n est alors égal au nombre de succès.

Notons maintenant B l'événement : « la famille a au moins un garçon ». Calculons $P(B)$. On a, d'après la formule des probabilités totales avec $([X = n])_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements :

$$\begin{aligned}
P(B) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P((X = n) \cap B) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)P_{[X=n]}(B) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n)P_{[X=n]}(B) \quad \text{car } P_{[X=0]}(B) = 0 \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n)P(Y_n \geqslant 1) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n)(1 - P(Y_n = 0)) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n\mathrm{e}^{-2}}{n!} \times \left(1 - \binom{n}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \\
&= \mathrm{e}^{-2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} - \mathrm{e}^{-2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \\
&= \mathrm{e}^{-2}(\mathrm{e}^2 - 1) - \mathrm{e}^{-2}(\mathrm{e}^1 - 1) \\
&= 1 - \mathrm{e}^{-2} - \mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^{-2} \\
&= 1 - \mathrm{e}^{-1}
\end{aligned}$$

La probabilité que la famille est au moins un garçon vaut donc $1 - \mathrm{e}^{-1}$.

3. Notons A l'événement : « la famille a exactement un garçon ». On cherche alors $P_A(X = 2)$. On a :

$$P_A(X = 2) = \frac{P(A \cap (X = 2)}{P(A)}.$$

Commençons par calculer $P(A)$. On a, d'après la formule des probabilités totales avec $([X = n])_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements :

$$\begin{aligned}
P(A) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P((X=n)\cap A) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)P_{[X=n]}(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n)P(Y_n=1) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2}\frac{2^n}{n!} \times \binom{n}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2}\frac{1}{(n-1)!} \\
&= \mathrm{e}^{-2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} = \mathrm{e}^{-2}\mathrm{e}^{1} = \mathrm{e}^{-1}
\end{aligned}$$

Il nous reste à calculer : $P((X=2)\cap A)$. On a :

$$\begin{aligned}
P((X=2)\cap A) &= P(X=2)P_{[X=2]}(A) \\
&= P(X=2)P(Y_2=1) \\
&= \mathrm{e}^{-2}\frac{2^2}{2!} \times \binom{2}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\
&= \mathrm{e}^{-2}
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$P_A(X=2) = \frac{\mathrm{e}^{-2}}{\mathrm{e}^{-1}} = \mathrm{e}^{-1}.$$