Correction des exercices du TD 21

Table des matières

1 TD21, exercice 1

1. Le premier 1 apparaît au i-ème lancer signifie qu'aux lancers 1,2,3,...,$i-1$; on n'a pas eu de 1. Ne pas avoir de 1 au j-ème lancer correspond à l'événement $\overline{A}_j$. Ainsi

$$B = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \ldots \cap \overline{A}_{i-1} \cap A_i.$$

2. Au moins un des résultats est un 1 signifie soit il y a eu un 1 au premier lancer ou un 1 au deuxième lancer ou un 1 au troisième lancer etc
Les "ou" se traduisent par des unions, ainsi :

$$C = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

3. Aucun lancer ne donne un 1 signifie qu'on n'a pas de 1 au premier lancer (c'est à dire $\overline{A}_1$) et pas de 1 au deuxième lancer (c'est à dire $\overline{A}_2$) et pas de 1 au troisième lancer (c'est à dire $\overline{A}_3$) etc
Les "et" se traduisent par des intersections, ainsi :

$$D = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \ldots = \bigcap_{i=1}^{+\infty} \overline{A}_i.$$

On peut remarquer que $D = \overline{C}$ car le contraire de "au moins un" est "aucun". On a donc :

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{+\infty} \overline{A}_i$$

2 TD 21, exercice 4

Il s'agit d'un exercice de probabilités conditionnelles.
Commençons par introduire quelques notations pour les différents événements de l'exercice. On note

- U_k l'événement « piocher une boule dans l'urne numéro k ». L'indice k varie donc de 1 à n.
- B_1 l'événement « la première boule tirée est blanche ».
- B_2 l'événement « la deuxième boule tirée est blanche ».

1. On nous demande donc de calculer $P(B_1 \cap B_2)$.
La famille d'événements $(U_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ forme un système complet d'événements. Ainsi d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(B_1 \cap B_2) = \sum_{k=1}^{n} P(U_k \cap (B_1 \cap B_2)),$$

ce qui s'écrit d'après la formule des probabilités composées (car $P(U_k) = \frac{1}{n} \neq 0$ pour tout k) :

$$P(B_1 \cap B_2) = \sum_{k=1}^{n} P(U_k) P_{U_k}(B_1 \cap B_2).$$

On a $P(U_k) = \frac{1}{n}$ car on choisit de manière équiprobable une des n urnes. Il reste donc à calculer $P_{U_k}(B_1 \cap B_2)$. En appliquant, de nouveau la formule des probabilités composées, on a :

$$P_{U_k}(B_1 \cap B_2) = P_{U_k}(B_1) P_{U_k \cap B_1}(B_2)$$

Il y a k boules blanches dans l'urne k, ainsi

$$P_{U_k}(B_1) = \frac{k}{n}.$$

Puis ayant déjà pioché une boule blanche dans l'urne k, on a :

$$P_{U_k \cap B_1}(B_2) = \frac{k-1}{n-1}$$

On a donc :

$$P_{U_k}(B_1 \cap B_2) = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}.$$

Ainsi

$$P(B_1 \cap B_2) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{k(k-1)}{n(n-1)}.$$

Il nous reste donc plus qu'à calculer cette somme, on a :

$$\begin{aligned}
P(B_1 \cap B_2) &= \frac{1}{n^2(n-1)} \sum_{k=1}^{n} k(k-1) \\
&= \frac{1}{n^2(n-1)} \sum_{k=1}^{n} k^2 - k \\
&= \frac{1}{n^2(n-1)} \sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{1}{n^2(n-1)} \sum_{k=1}^{n} k \\
&= \frac{1}{n^2(n-1)} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) - \frac{1}{n^2(n-1)} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) \\
&= \frac{n(n+1)}{n^2(n-1)} \left(\frac{2n+1}{6} - \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{n+1}{n(n-1)} \left(\frac{2n+1-3}{6} \right) \\
&= \frac{n+1}{n(n-1)} \left(\frac{2n-2}{6} \right) \\
&= \frac{n+1}{n(n-1)} \left(\frac{2(n-1)}{6} \right) \\
&= \frac{n+1}{3n} \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{3n}
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{P(B_1 \cap B_2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3n}}$.

2. Le début du raisonnement reste le même et on obtient la formule suivante à l'aide de la formule des probabilités totales et celle des probabilités composées :

$$P(B_1 \cap B_2) = \sum_{k=1}^{n} P(U_k) P_{U_k}(B_1 \cap B_2).$$

On a toujours $P(U_k) = \frac{1}{n}$, ce qui change c'est le calcul de $P_{U_k}(B_1 \cap B_2)$.
Effectuant un tirage avec remise, les pioches des boules sont indépendantes, ainsi :

$$P_{U_k}(B_1 \cap B_2) = P_{U_k}(B_1) P_{U_k}(B_2) = \frac{k}{n} \times \frac{k}{n} = \frac{k^2}{n^2}.$$

Ainsi

$$P(B_1 \cap B_2) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{k^2}{n^2}.$$

Il nous reste donc plus qu'à calculer cette somme, on a :

$$\begin{aligned} P(B_1 \cap B_2) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3} \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 \\ &= \frac{1}{n^3} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}. \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{P(B_1 \cap B_2) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}}$.

3. Dans le premier cas, on a de façon immédiate

$$\lim_{n \to +\infty} P(B_1 \cap B_2) = \frac{1}{3}.$$

Dans le deuxième cas, on est en présence, a priori, d'une forme indéterminée, développons le numérateur puis factorisons-le par n^2, on a :

$$P(B_1 \cap B_2) = \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2} = \frac{2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{6}$$

Ainsi $\lim_{n \to +\infty} P(B_1 \cap B_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
Remarque : Finalement lorsque n tend vers l'infini, le fait de tirer avec remise ou sans remise n'importe pas sur la valeur de $P(B_1 \cap B_2)$.

3 TD 21, exercice 5

Pour répondre à la question, on peut modéliser l'énoncé de la manière suivante.

Tout d'abord, remarquons que la phrase « Les ECG1 sont les meilleurs, ils intégreront tous HEC ! » constitue un bloc de 54 caractères.

L'astuce est donc de voir la suite infinie de caractères comme une suite infinie de blocs de 54 caractères. Introduisons alors les événements suivants :

- B : « le bloc de 54 caractères forme la phrase : Les ECG1 sont les meilleurs, ils intégreront tous HEC ! »
- A_n : « le bloc de 54 caractères formant la phrase : Les ECG1 sont les meilleurs, ils intégreront tous HEC ! est obtenu pour la première fois lors de la saisie du n-ème bloc »
- A : « le singe écrit la phrase : Les ECG1 sont les meilleurs, ils intégreront tous HEC ! »

Pour que l'événement A soit réalisé, il faut qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que le singe saisisse le bloc de 54 caractères formant la phrase : Les ECG1 sont les meilleurs, ils intégreront tous HEC ! pour la première fois lors de la saisie du n-ème bloc. Ainsi $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$.

On a alors d'après le corollaire du théorème de la limite monotone que :

$$P(A) = \lim_{n\to+\infty} P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k)$$

Les événements (A_n) sont incompatibles deux à deux donc :

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

Or, on remarque que $P(A_k) = \left(P(\overline{B})\right)^{k-1} P(B)$. Or $P(B) = \left(\frac{1}{50}\right)^{54}$ car les saisies sont indépendantes les unes des autres. Notons $p = \frac{1}{50^{54}} \in]0,1[$. Ainsi, on a :

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n}(1-p)^{k-1}p = p\sum_{i=0}^{n-1}(1-p)^i = p \times \frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} = 1-(1-p)^n$$

Comme $1-p \in]0,1[$, $\lim_{n\to+\infty} 1-(1-p)^n = 1$ ainsi

$$P(A) = 1$$

et donc presque-sûrement, le singe écrira la phrase « Les ECG1 sont les meilleurs, ils intégreront tous HEC ! ».

4 TD 21, exercice 6

L'événement A_n est « obtenir **au moins** une fois pile au cours des n premiers lancers ». Il est compliqué de calculer de manière directe la probabilité d'un événement où il y a du "au moins une fois". L'astuce classique consiste à calculer la probabilité de l'événement contraire $\overline{A_n}$. En effet, ici on a :

$\overline{A_n}$ = « n'obtenir aucun pile au cours des n premiers lancers » = « n'obtenir que des faces au cours des n premiers lancers ».

Or la probabilité d'obtenir face est $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, en supposant que tous les lancers sont indépendants, on a donc :

$$P(\overline{A_n}) = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

On en déduit alors pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(A_n) = 1 - P(\overline{A_n}) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

L'événement B est « avoir au moins une fois pile ». Cela signifie qu'il existe un entier n tel qu'on obtienne au moins un pile au cours des n premiers lancers. On a donc :

$$B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n.$$

Ainsi

$$P(B) = P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n).$$

Or la famille $(A_n)_n$ est une famille croissante d'événements. En effet, si on a au moins un pile au cours des n premiers lancers, il est clair qu'on en a au moins aussi un au cours des $n+1$ premiers lancers, cela signifie que :

$$A_n \subset A_{n+1}$$

et donc la famille $(A_n)_n$ est une famille croissante d'événements. Ainsi d'après le théorème de la limite monotone, on a :

$$P(B) = P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n) = \lim_{n\to+\infty} 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1$$

car $\frac{2}{3} \in]-1;1[$.
Ainsi $P(B) = 1$ et donc l'événement B est presque-sûr.

5 TD 21, exercice 7

1. L'événement B est « ne jamais obtenir 1 », pour ce faire il faut « ne pas obtenir 1 au cours du 1er lancer » **et** « ne pas obtenir 1 au cours des 2 premiers lancers » **et** « ne pas obtenir 1 au cours des 3 premiers lancers » **et** ...... **et** « ne pas obtenir 1 au cours des n premiers lancers » **et** ......
Le **et** se traduit mathématiquement par des intersections, ainsi :
$$B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n.$$
2. Non c'est une suite décroissante d'événements. En effet, si on n'a pas obtenu de 1 au cours des $n+1$ premiers lancers alors il est évident qu'on n'a pas obtenu de 1 au cours des n premiers lancers, ainsi
$$A_{n+1} \subset A_n$$
et donc la famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille décroissante d'événements.
3. La probabilité de ne pas avoir 1 est $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$, de plus les lancers sont indépendants, ainsi pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$P(A_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$
4. On a
$$P(B) = P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\right)$$
Or la famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille décroissante d'événements donc d'après le théorème de la limite monotone, on a :
$$P(B) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0 \quad \text{car } \frac{5}{6} \in]-1;1[.$$
On a $\boxed{P(B)=0}$ et donc l'événement B est négligeable.

6 TD 21, exercice 8

1. Pour k dans $\mathbb{N}^*$, on note G_k l'événement : « le joueur gagne la k-ième partie ».
Rappel : lorsqu'un événement comporte du " au moins une fois", il faut passer par l'événement contraire pour calculer sa probabilité.
$\overline{A_n}$ est l'événement : « au cours des n premières parties, le joueur ne gagne jamais ».
Alors $\overline{A_n} = \overline{G_1} \cap \overline{G_2} \cap \ldots \cap \overline{G_n}$ donc
$$P(\overline{A_n}) = P(\overline{G_1} \cap \overline{G_2} \cap \ldots \cap \overline{G_n})$$
Or, les événements $\overline{G_1}$, $\overline{G_2}$, ..., $\overline{G_n}$ sont mutuellement indépendants donc
$$P(\overline{A_n}) = P(\overline{G_1}) \times P(\overline{G_2}) \times \ldots \times P(\overline{G_n}) = \left(\frac{36}{37}\right)^n$$
et par conséquent :
$$P(A_n) = 1 - P(\overline{A_n}) = 1 - \left(\frac{36}{37}\right)^n$$
2. L'événement A est : « le joueur gagne au moins une fois » c'est à dire qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que l'événement A_n soit réalisé. Cela s'écrit :
$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n.$$
On a donc
$$P(A) = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\right)$$
Or il est clair que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, si l'événement A_n est réalisé, alors l'événement A_{n+1} est réalisé. Autrement dit, on a $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ c'est à dire la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. Le théorème de la limite monotone s'applique et on peut écrire :
$$P(A) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$$

Or, d'après la question précédente, $P(A_n) = 1 - \left(\frac{36}{37}\right)^n$. Or, $\frac{36}{37} \in]-1;1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{36}{37}\right)^n = 0$ d'où sans peine $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n) = 1$ et on peut conclure que $\boxed{P(A) = 1}$.

3. D'après ce qui précède, $P(A) = 1$ donc l'événement A est presque sûr : autrement dit, le joueur misera presque sûrement sur le bon numéro.

7 TD 21, exercice 9

1. (a) Pour k dans $\mathbb{N}^*$, on note B_k l'événement : « on obtient la boule blanche au k-ième tirage ».
On a $E_1 = B_1$, on a $E_2 = \overline{B_1} \cap B_2$ et pour $n \geqslant 3$, on a :

$$E_n = \overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \ldots \cap \overline{B_{n-1}} \cap B_n$$

donc

$$P(E_n) = P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \ldots \cap \overline{B_{n-1}} \cap B_n)$$

Les tirages sont indépendants et on peut écrire :

$$P(E_n) = P(\overline{B_1}) \times P(\overline{B_2}) \times \ldots \times \ldots \times P(\overline{B_{n-1}}) \times P(B_n) = \left(\prod_{k=1}^{n-1} P(\overline{B_k})\right) P(B_n)$$

Or $P(\overline{B_k}) = \frac{k}{k+1}$ et $P(B_n) = \frac{1}{n+1}$ donc

$$P(E_n) = \left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k+1}\right) \frac{1}{n+1} = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} k}{\prod_{k=1}^{n-1}(k+1)} \times \frac{1}{n+1} = \frac{(n-1)!}{n!} \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Remarque : Si vous avez du mal à comprendre le raisonnement, essayez d'abord de calculer $P(E_1)$, $P(E_2)$ et $P(E_3)$.

(b) On part de l'expression de droite et on met les termes au même dénominateur, on obtient :

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} = \frac{(a+b)n + a}{n(n+1)}$$

On identifie alors les coefficients et on obtient $a = 1$ et $a + b = 0$ soit $a = 1$ et $b = -1$.

(c) Notons E : « on obtient au moins une boule blanche ». Alors $E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} E_n$.

$$P(E) = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} E_n\right).$$

D'après le corollaire du théorème de la limite monotone, on a :

$$P(E) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right).$$

Or les événements (E_n) sont incompatibles donc :

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(E_k)$$

D'après la question précédente, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} P(E_k) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \qquad \text{somme télescopique}$$

Ainsi

$$P(E) = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

On a donc $\boxed{P(E) = 1}$: on obtient presque sûrement au moins une boule blanche.

2. (a) Pour k dans $\mathbb{N}^*$, on note N_k l'événement : « on obtient une boule noire au k-ième tirage ».
On a $F_1 = N_1$, on a $F_2 = \bar{N}_1 \cap N_2$ et pour $n \geqslant 3$, on a :

$$F_n = \overline{N_1} \cap \overline{N_2} \cap \ldots \cap \overline{N_{n-1}} \cap N_n$$

soit encore

$$F_n = B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{n-1} \cap N_n$$

donc

$$P(F_n) = P(B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{n-1} \cap N_n)$$

Les tirages étant indépendants, on a :

$$P(F_n) = \left(\prod_{k=1}^{n-1} P(B_k)\right) P(\overline{B_n}).$$

donc

$$P(F_n) = \left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}\right) \times \frac{n}{n+1} = \frac{n}{n!(n+1)} = \frac{n}{(n+1)!}$$

Or,

$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \frac{n+1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}.$$

donc on a bien :

$$P(F_n) = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}.$$

(b) Notons F : « on obtient au moins une boule noire ». Alors $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n$. Ainsi :

$$P(F) = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n\right).$$

D'après le corollaire du théorème de la limite monotone, on a :

$$P(F) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=1}^{n} F_k\right).$$

Or les événements (F_n) sont incompatibles donc :

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} F_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(F_k)$$

D'après la question précédente, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} P(F_k) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \qquad \text{somme télescopique}$$

Ainsi

$$P(F) = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)!}\right) = 1.$$

On a donc $\boxed{P(F) = 1}$: on obtient presque sûrement au moins une boule noire.

8 TD 21, exercice 10

1. A_n et $\overline{A_n}$ forment un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(E_n) = P(A_n \cap E_n) + P(\overline{A_n} \cap E_n),$$

Cela s'écrit à l'aide de la formule des probabilités composées :

$$P(E_n) = P(A_n)P_{A_n}(E_n) + P(\overline{A_n})P_{\overline{A_n}}(E_n).$$

D'après l'énoncé, $P_{A_n}(E_n) = a$ et $P_{\overline{A_n}}(E_n) = b$ donc

$$P(E_n) = aP(A_n) + bP(\overline{A_n})$$

Puisque $P(\overline{A_n}) = 1 - P(A_n)$, on obtient finalement :

$$P(E_n) = (a - b)P(A_n) + b.$$

2. A_n et $\overline{A_n}$ forment un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P(\overline{A_n} \cap A_{n+1}).$$

Cela s'écrit à l'aide de la formule des probabilités composées :

$$P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n})P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$$

Sachant que le n-ième lancer se fait avec la pièce A, il se fera avec la pièce A au lancer suivant si et seulement si le n-ième lancer a donné PILE et donc :

$$P_{A_n}(A_{n+1}) = P_{A_n}(E_n) = a$$

Sachant que le n-ième lancer se fait avec la pièce B, il se fera avec la pièce A au lancer suivant si et seulement le n-ième lancer a donné FACE et donc :

$$P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = P_{\overline{A_n}}(\overline{E_n}) = 1 - P_{\overline{A_n}}(E_n) = 1 - b$$

Par conséquent :

$$P(A_{n+1}) = aP(A_n) + (1 - b)P(\overline{A_n})$$

Puisque $P(\overline{A_n}) = 1 - P(A_n)$, on obtient finalement :

$$P(A_{n+1}) = (a + b - 1)P(A_n) + (1 - b)$$

3. Dans cette question, on sort du monde des probas et on entre dans celui des suites. Posons $u_n = P(A_n)$. L'objectif de cette question est de trouver l'expression de la suite (u_n) sachant qu'elle vérifie la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = (a + b - 1)u_n + 1 - b.$$

Tout d'abord, remarquons qu'on a $a \in]0; 1[$ et $b \in]0; 1[$ donc $a + b - 1 \in] - 1; 1[$ et en particulier, $a + b - 1 \neq 1$. La suite (u_n) est donc arithmético-géométrique car $a + b - 1 \neq 1$.
L'équation $x = (a + b - 1)x + (1 - b)$ a pour solution

$$x = \frac{1 - b}{2 - a - b}$$

Posons $w_n = u_n - \frac{1-b}{2-a-b}$. D'après le cours, la suite (w_n) est géométrique de raison $q = a + b - 1$ donc $w_n = w_1 q^{n-1}$ c'est à dire

$$P(A_n) - \frac{1 - b}{2 - a - b} = \left(P(A_1) - \frac{1 - b}{2 - a - b}\right)(a + b - 1)^{n-1}$$

Le choix de la pièce se fait au hasard pour le premier tirage donc $P(A_1) = \frac{1}{2}$ d'où après calculs :

$$P(A_n) = \frac{b - a}{2(2 - a - b)}(a + b - 1)^{n-1} + \frac{1 - b}{2 - a - b}$$

Enfin, d'après la question **1.** $P(E_n) = (a - b)P(A_n) + b$.

Remarque : on sait que $a + b - 1 \in] - 1; 1[$ donc $\lim_{n\to+\infty} (a + b - 1)^{n-1} = 0$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = \frac{1 - b}{2 - a - b}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} P(E_n) = \frac{(1 - b)(a - b)}{2 - a - b} + b$$

soit encore :

$$\lim_{n\to+\infty} P(E_n) = \frac{a + b - 2ab}{2 - a - b}$$

9 TD21, exercice 11

Commençons par noter A l'événement « ne pas obtenir 6 ».
Notons ensuite pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, B_n l'événement « on obtient Pile pour la première fois au n-ème lancer » et on pose B_0 « ne pas obtenir du tout Pile ».
La famille $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements car les événements sont deux à deux incompatibles de plus $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$.

Ainsi d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B_n \cap A).$$

Or $P(B_0 \cap A) = 1$ car $P(B_0) = 0$ (cf Exemple 21.6 du cours) donc

$$P(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n \cap A),$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(B_n) = \left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, en effet, les lancers sont indépendants et il faut faire $n-1$ face et 1 pile. De plus, la pièce est équilibrée. Comme $P(B_n) \neq 0$, on peut écrire :

$$P(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n)P_{B_n}(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

en effet, si B_n est réalisé, on lance n fois le dé, les lancers sont indépendants et la probabilité de ne pas avoir 6 à un lancer est de $\frac{5}{6}$. Ainsi $P_{B_n}(A) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$.
Ainsi

$$P(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{12}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{5}{12}} - 1 = \frac{12}{7} - 1 = \frac{5}{7}$$