Compléments de probabilité

Exercice 1 (♣)

On jette un dé à six faces une infinité de fois et on note la suite des résultats obtenus. On note pour tout entier naturel $i \in \mathbb{N}^*$, A_i l'événement « le résultat du i-ème lancer est 1 ». Exprimer les évènements suivants à l'aide des événements A_i :

1. B_i : « Le premier 1 apparaît au i-ème lancer. »
2. C : « Au moins un des résultats est un 1. »
3. D : « Aucun lancer ne donne un 1 ».

Exercice 2 (♣)

Soit P une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Montrer que

$$P(\{n\}) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

Exercice 3 (♥)

On se place sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

1. Soit P une loi de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$P(\{n\}) = \frac{3^{n-2}c}{(n+1)!}$$

   où c est une constante positive. Calculer la valeur de c.

2. Soit P une loi de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$P(\{n, n+1\}) = 2^{-n}c$$

   où c est une constante positive. Calculer la valeur de c.

Exercice 4 (♠)

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. Dans l'urne numérotée k se trouvent k boules blanches et $n-k$ boules rouges. On choisit au hasard (de manière équiprobable) une urne, puis on tire deux boules dans cette urne.

1. Quelle est la probabilité d'avoir deux boules blanches ?
2. Même question si on tire les deux boules blanches successivement et avec remise.
3. Quelle est la limite de ces probabilités quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 5 (♠)

Un singe tape une suite infinie de caractères au hasard sur un clavier d'ordinateur qui comporte 50 touches. Montrer qu'il écrira presque-sûrement la phrase : « Les ECG1 sont les meilleurs, ils intégreront tous HEC ! »

Exercice 6 (♥)

On effectue un infinité de lancers d'une pièce truquée où $\frac{1}{3}$ est la probabilité d'avoir pile. On introduit B l'événement «avoir au moins une fois pile», ainsi que A_n l'événement «obtenir au moins un pile au cours des n premiers lancers».
Déterminer $P(A_n)$ en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire $P(B)$.

Exercice 7 (♥)

On considère une infinité de lancers d'un dé non truqué et on veut déterminer la probabilité de ne jamais obtenir le nombre 1. Pour cela, on introduit les événements :

- B : « ne jamais obtenir de 1 ».
- A_n : « ne pas obtenir de 1 au cours des n premiers lancers ».

Déterminer $P(A_n)$ en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire $P(B)$.

Exercice 8 (♥)

À la roulette, la probabilité de miser sur le bon numéro est égale à $\frac{1}{37}$. Un joueur effectue une infinité de parties, supposées indépendantes les unes des autres. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement : «au cours des n premières parties, le joueur gagne au moins une fois». On note de plus A l'événement : «le joueur gagne au moins une fois».

1. Calculer $P(A_n)$.
2. En déduire $P(A)$.
3. Montrer que le joueur misera presque sûrement sur le bon numéro.

Exercice 9 (♣)

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue dans cette urne une suite de tirages. À chaque tirage, on note la couleur de la boule tirée, on la remet dans l'urne et on ajoute en plus une boule noire. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on définit les événements :

- E_n : « on obtient la première boule blanche au n-ième tirage ».
- F_n : « on obtient la première boule noire au n-ième tirage ».

1. (a) Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$P(E_n) = \frac{1}{n(n+1)}.$$

   (b) Déterminer deux réels a et b tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad P(E_n) = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}.$$

   (c) En déduire que l'on obtient presque sûrement au moins une boule blanche.

2. (a) Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$P(F_n) = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}.$$

(b) En déduire que l'on obtient presque sûrement au moins une boule noire.

Exercice 10 (♦)

On dispose de 2 pièces d'apparence identique, la pièce A donnant PILE avec la probabilité $a \in]0;1[$, et la pièce B donnant PILE avec la probabilité $b \in]0;1[$.
Pour le premier lancer du jeu, on choisit une pièce au hasard et pour les coups suivants, on adopte la stratégie suivante : si on obtient PILE, on garde la pièce pour le lancer suivant et si on obtient FACE, on change de pièce pour le lancer suivant.
Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement «le n-ième lancer se fait avec la pièce A», $B_n = \overline{A_n}$ et E_n l'événement «le n-ième lancer amène PILE».

1. Trouver une relation entre $P(E_n)$ et $P(A_n)$.
2. Trouver une relation entre $P(A_{n+1})$ et $P(A_n)$.
3. En déduire $P(A_n)$ puis $P(E_n)$.

Exercice 11 (♠)

On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir pile pour la première fois. Si pile sort au n-ème lancer, on lance n fois un dé cubique non truqué. Si pile ne sort pas, on ne lance pas le dé. Quelle est la probabilité de ne pas obtenir de 6 ?

Exercice 12 (♠)

On lance un dé jusqu'à obtenir 6. Si 6 apparaît au n-ème lancer, on tire n fois avec remise une carte dans un jeu de 32 cartes. Si 6 n'apparaît pas, on ne tire pas de carte. On n'obtient aucun roi. Qu'elle est la probabilité d'avoir obtenu 6 dès le premier lancer du dé ?

Exercice 13 (♠)

On lance une infinité de fois une pièce dont la probabilité de faire pile vaut $p \in]0,1[$. On note A_n l'événement « on obtient deux piles consécutifs pour la première fois lors du n-ième lancer » et on désire calculer sa probabilité a_n.

1. Déterminer a_1, a_2 et a_3.
2. On considère les résultats des deux premiers lancers : PP, PF, FP et FF et le système complet d'événements
$$\{PP, PF, \tilde{F} = FP \cup FF\}.$$
Expliquer pourquoi on a $P(A_{n+2} \mid PF) = P(A_n)$, $P\left(A_{n+2} \mid \tilde{F}\right) = P(A_{n+1})$ et $P(A_{n+2} \mid PP) = 0$.
3. En déduire une expression de a_{n+2} en fonction de a_n et a_{n+1} pour $n \geq 1$.
4. On pose $S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ (sous réserve d'existence). Montrer alors que
$$S - a_1 - a_2 = (1-p)(S - a_1) + p(1-p)S.$$
5. En déduire qu'il est presque sûr d'observer deux piles consécutifs.

Exercice 14 (♥)

Dans une population, la probabilité p_n qu'une famille ait n enfants est donnée par

$$p_n = a\frac{2^n}{n!}, a > 0.$$

On suppose qu'il est équiprobable d'avoir une fille ou un garçon.

1. Déterminer la valeur de a.
2. Calculer la probabilité que la famille ait au moins un garçon.
3. On suppose que la famille a exactement un garçon. Quelle est la probabilité que la famille comporte deux enfants ?

Exercice 15 (♠)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un suite d'événements mutuellement indépendants.

1. Montrer que
$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1 - \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} P\left(\bar{A}_k\right)$$
2. On suppose que $P(A_n) \neq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes.
   (a) $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1$
   (b) $\sum_{n\geq 0} \ln\left(P\left(\overline{A_n}\right)\right)$ diverge
   (c) $\sum_{n\geq 0} P(A_n)$ diverge.

♣ Du trèfle à brouter...
♥ À connaître par coeur.
♠ Qui s'y frotte s'y pique !
♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau !