

Compléments de probabilité

Exercice 1 (♣)

On jette un dé à six faces une infinité de fois et on note la suite des résultats obtenus. On note pour tout entier naturel $i \in \mathbb{N}^*$, A_i l'événement « le résultat du i -ème lancer est 1 ». Exprimer les événements suivants à l'aide des événements A_i :

- B_i : « Le premier 1 apparaît au i -ème lancer. »
- C : « Au moins un des résultats est un 1. »
- D : « Aucun lancer ne donne un 1. »

Exercice 2 (♣)

Soit P une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Montrer que

$$P(\{n\}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Exercice 3 (♥)

On se place sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

- Soit P une loi de probabilité sur (Ω, \mathcal{A}) telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$P(\{n\}) = \frac{3^{n-2}c}{(n+1)!}$$

où c est une constante positive. Calculer la valeur de c .

- Soit P une loi de probabilité sur (Ω, \mathcal{A}) telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$P(\{n, n+1\}) = 2^{-n}c$$

où c est une constante positive. Calculer la valeur de c .

Exercice 4 (♠)

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n . Dans l'urne numérotée k se trouvent k boules blanches et $n - k$ boules rouges. On choisit au hasard (de manière équiprobable) une urne, puis on tire deux boules dans cette urne.

- Quelle est la probabilité d'avoir deux boules blanches ?
- Même question si on tire les deux boules blanches successivement et avec remise.
- Quelle est la limite de ces probabilités quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 5 (♠)

Un singe tape une suite infinie de caractères au hasard sur un clavier d'ordinateur qui comporte 50 touches. Montrer qu'il écrira presque-sûrement la phrase : « Les ECG1 sont les meilleurs, ils intégreront tous HEC ! »

Exercice 6 (♥)

On effectue un infinité de lancers d'une pièce truquée où $\frac{1}{3}$ est la probabilité d'avoir pile. On introduit B l'événement « avoir au moins une fois pile », ainsi que A_n l'événement « obtenir au moins un pile au cours des n premiers lancers ». Déterminer $P(A_n)$ en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire $P(B)$.

Exercice 7 (♥)

On considère une infinité de lancers d'un dé non truqué et on veut déterminer la probabilité de ne jamais obtenir le nombre 1. Pour cela, on introduit les événements :

- B : « ne jamais obtenir de 1 ».
- A_n : « ne pas obtenir de 1 au cours des n premiers lancers ».

Déterminer $P(A_n)$ en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire $P(B)$.

Exercice 8 (♥)

À la roulette, la probabilité de miser sur le bon numéro est égale à $\frac{1}{37}$. Un joueur effectue une infinité de parties, supposées indépendantes les unes des autres. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement : « au cours des n premières parties, le joueur gagne au moins une fois ». On note de plus A l'événement : « le joueur gagne au moins une fois ».

- Calculer $P(A_n)$.
- En déduire $P(A)$.
- Montrer que le joueur misera presque sûrement sur le bon numéro.

Exercice 9 (♣)

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue dans cette urne une suite de tirages. À chaque tirage, on note la couleur de la boule tirée, on la remet dans l'urne et on ajoute en plus une boule noire. Pour tout n dans \mathbb{N}^* , on définit les événements :

- E_n : « on obtient la première boule blanche au n -ième tirage ».
- F_n : « on obtient la première boule noire au n -ième tirage ».

- (a) Soit n dans \mathbb{N}^* . Montrer que :

$$P(E_n) = \frac{1}{n(n+1)}.$$

- (b) Déterminer deux réels a et b tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(E_n) = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}.$$

- (c) En déduire que l'on obtient presque sûrement au moins une boule blanche.

2. (a) Soit n dans \mathbb{N}^* . Montrer que :

$$P(F_n) = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}.$$

(b) En déduire que l'on obtient presque sûrement au moins une boule noire.

Exercice 10 (♦)

On dispose de 2 pièces d'apparence identique, la pièce A donnant PILE avec la probabilité $a \in]0; 1[$, et la pièce B donnant PILE avec la probabilité $b \in]0; 1[$.

Pour le premier lancer du jeu, on choisit une pièce au hasard et pour les coups suivants, on adopte la stratégie suivante : si on obtient PILE, on garde la pièce pour le lancer suivant et si on obtient FACE, on change de pièce pour le lancer suivant. Pour n dans \mathbb{N}^* , on note A_n l'événement « le n -ième lancer se fait avec la pièce A », $B_n = \overline{A_n}$ et E_n l'événement « le n -ième lancer amène PILE ».

1. Trouver une relation entre $P(E_n)$ et $P(A_n)$.
2. Trouver une relation entre $P(A_{n+1})$ et $P(A_n)$.
3. En déduire $P(A_n)$ puis $P(E_n)$.

Exercice 11 (♠)

On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir pile pour la première fois. Si pile sort au n -ème lancer, on lance n fois un dé cubique non truqué. Si pile ne sort pas, on ne lance pas le dé. Quelle est la probabilité de ne pas obtenir de 6 ?

Exercice 12 (♠)

On lance un dé jusqu'à obtenir 6. Si 6 apparaît au n -ème lancer, on tire n fois avec remise une carte dans un jeu de 32 cartes. Si 6 n'apparaît pas, on ne tire pas de carte. On n'obtient aucun roi. Qu'elle est la probabilité d'avoir obtenu 6 dès le premier lancer du dé ?

Exercice 13 (♠)

On lance une infinité de fois une pièce dont la probabilité de faire pile vaut $p \in]0; 1[$. On note A_n l'événement « on obtient deux piles consécutifs pour la première fois lors du n -ième lancer » et on désire calculer sa probabilité a_n .

1. Déterminer a_1, a_2 et a_3 .
2. On considère les résultats des deux premiers lancers : PP, PF, FP et FF et le système complet d'événements

$$\{PP, PF, \tilde{F} = FP \cup FF\}.$$

Expliquer pourquoi on a $P(A_{n+2} | PF) = P(A_n)$, $P(A_{n+2} | \tilde{F}) = P(A_{n+1})$ et $P(A_{n+2} | PP) = 0$.

3. En déduire une expression de a_{n+2} en fonction de a_n et a_{n+1} pour $n \geq 1$.
4. On pose $S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ (sous réserve d'existence). Montrer alors que

$$S - a_1 - a_2 = (1 - p)(S - a_1) + p(1 - p)S.$$

5. En déduire qu'il est presque sûr d'observer deux piles consécutifs.

Exercice 14 (♠♠)

Dans une population, la probabilité p_n qu'une famille ait n enfants est donnée par

$$p_n = a \frac{2^n}{n!}, a > 0.$$

On suppose qu'il est équiprobable d'avoir une fille ou un garçon.

1. Déterminer la valeur de a .
2. Calculer la probabilité que la famille ait au moins un garçon.
3. On suppose que la famille a exactement un garçon. Quelle est la probabilité que la famille comporte deux enfants ?

Exercice 15 (♠)

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements mutuellement indépendants.

1. Montrer que

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^n P(\overline{A}_k)$$

2. On suppose que $P(A_n) \neq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

- (a) $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1$
- (b) $\sum_{n \geq 0} \ln(P(\overline{A}_n))$ diverge
- (c) $\sum_{n \geq 0} P(A_n)$ diverge.

♣ Du trèfle à brouter...
♥ À connaître par coeur.

♠ Qui s'y frotte s'y pique!
♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau!