Correction des exercices du TD 20

1 TD20, exercice 11

1. Soit $y \in \mathrm{Im}(f+g)$ alors il existe $x \in E$ tel que $y = (f+g)(x) = f(x) + g(x)$. Donc $y \in \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$. Ainsi $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$.
   On alors $\dim(\mathrm{Im}(f+g)) \leqslant \dim(\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g))$. Or $\dim(\mathrm{Im}(f+g)) = \mathrm{rg}(f+g)$ et d'après la formule de Grassman, on a :
   $$\dim(\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)) = \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(g)) - \dim(\mathrm{Im}(\mathrm{f}) \cap \mathrm{Im}(g),$$
   Comme $\dim(\mathrm{Im}(\mathrm{f}) \cap \mathrm{Im}(g) \leqslant 0$, on en déduit que :
   $$\dim(\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)) \leqslant \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(g)).$$
   En conclusion, $\mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.
2. (a) Soit $y \in \mathrm{Im}(g)$ alors il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$. On a alors $f(y) = f(g(x)) = (f \circ g)(x) = 0$. Donc $y \in \mathrm{Ker}(f)$. On a bien montré l'inclusion $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
   (b) Comme $f+g$ est bijectif, $\mathrm{rg}(f+g) = n$. On obtient alors la minoration $n \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.
   De plus, comme $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(f)$, on en déduit que $\dim(\mathrm{Im}(g)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(f))$. D'après le théorème du rang, on a :
   $$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f).$$
   Ainsi $\mathrm{rg}(g) \leqslant \dim(E) - \mathrm{rg}(f)$, or $\dim(E) = n$ donc $\mathrm{rg}(g) \leqslant n - \mathrm{rg}(f)$ soit la majoration $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) \leqslant n$.
   On en déduit donc que $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) = n$.

2 TD 20, exercice 17

1. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$, $\displaystyle\int_0^1 P(t)\mathrm{d}t \in \mathbb{R}$. Il reste donc à montrer que l'application f est linéaire.
   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[x]^2$ alors, en utilisant la linéarité de l'intégrale, on a :
   $$f(\lambda P + Q) = \int_0^1 (\lambda P(t) + Q(t))\mathrm{d}t = \lambda \int_0^1 P(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 Q(t)\mathrm{d}t = \lambda f(P) + f(Q).$$
   Ainsi $\boxed{f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[x], \mathbb{R})}$.
   Déterminons maintenant $\mathrm{Im}(f)$. On a : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}$ donc $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(\mathbb{R})$ soit $\mathrm{rg}(f) \leqslant 1$. Or $f \neq 0$ car par exemple $f(1) = 1$ donc $\mathrm{rg}(f) > 0$. Ainsi $\mathrm{rg}(f) = 1$ et $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}}$.
2. On sait d'ores et déjà grâce au théorème du rang que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = n + 1 - 1 = n$.
   Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k x^k \in \mathrm{Ker}(f)$, on a alors $f(P) = 0$, en utilisant la linéarité de l'intégrale on obtient :
   $$f(P) = 0 \iff \sum_{k=0}^n a_k \int_0^1 t^k \mathrm{d}t = 0 \iff \sum_{k=0}^n a_k \left[\frac{t^k}{k+1}\right]_0^1 = 0 \iff \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} = 0.$$
   Grâce à cette égalité, exprimons a_n en fonction des (a_k) pour k variant de 1 à $n-1$, on a :
   $$a_n = -(n+1) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{k+1}.$$
   Ainsi
   $$\mathrm{Ker}(f) = \{P = \sum_{k=0}^n a_k x^k \mid f(P) = 0\} = \{P = \sum_{k=0}^n a_k x^k \mid a_n = -(n+1) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{k+1}\}$$

soit

$$\operatorname{Ker}(f) = \left\{ P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k + \left(-(n+1) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{k+1} \right) x^n \ |, (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \right\}$$

soit

$$\operatorname{Ker}(f) = \left\{ P = a_0(1-(n+1)) + a_1(x - \frac{n+1}{2}) + a_2(x^2 - \frac{n+2}{3}) + \ldots + a_{n-1}(x^{n-1} - \frac{n+1}{n}) \ |, (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \right\}$$

soit

$$\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}\left(1-(n+1), x - \frac{n+1}{2}, x^2 - \frac{n+1}{3}, \ldots, x^{n-1} - \frac{n+1}{n}\right)$$

On obtient donc que la famille $\left(1-(n+1), x - \frac{n+1}{2}, x^2 - \frac{n+1}{3}, \ldots, x^{n-1} - \frac{n+1}{n}\right)$ est génératrice de $\operatorname{Ker}(f)$, comme elle est de cardinal $n = \dim(\operatorname{Ker}(f))$, c'est une base de $\operatorname{Ker}(f)$.

3 TD20, exercice 23

1. Fait en classe
2. Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, $(\alpha', \beta', \gamma') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda(\alpha, \beta, \gamma) + (\alpha', \beta', \gamma')) &= f((\lambda\alpha + \alpha', \lambda\beta + \beta', \lambda\gamma + \gamma')) \\ &= (3(\lambda\alpha + \alpha') + \lambda\gamma + \gamma', \lambda\alpha + \alpha' - (\lambda\beta + \beta') + \lambda\gamma + \gamma', -3(\lambda\alpha + \alpha') - 3(\lambda\beta + \beta') + \lambda\gamma + \gamma')) \\ &= \lambda(3\alpha + \gamma, \alpha - \beta + \gamma, -3\alpha - 3\beta + \gamma) + (3\alpha' + \gamma', \alpha' - \beta' + \gamma', -3\alpha' - 3\beta' + \gamma') \\ &= \lambda f((\alpha, \beta, \gamma)) + f((\alpha', \beta', \gamma')). \end{aligned}$$

f est donc une application linéaire qui va de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ c'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

3. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \operatorname{Ker}(f)$, on a : $f((\alpha, \beta, \gamma)) = (0, 0, 0)$, on obtient alors le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 3\alpha & + & & & \gamma & = & 0 \\ \alpha & - & \beta & + & \gamma & = & 0 \\ -3\alpha & - & 3\beta & + & \gamma & = & 0 \end{array} \right.$$

On échelonne le système : $L_2 \leftarrow 3L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$. On a :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 3\alpha & + & & & \gamma & = & 0 \\ & - & 3\beta & + & 2\gamma & = & 0 \\ & & -3\beta & + & 2\gamma & = & 0 \end{array} \right.$$

soit

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 3\alpha & + & & & \gamma & = & 0 \\ & - & 3\beta & + & 2\gamma & = & 0 \end{array} \right.$$

Ainsi $\alpha = -\frac{1}{3}\gamma$ et $\beta = \frac{2}{3}\gamma$, on a donc

$$\operatorname{Ker}(f) = \left\{ (-\frac{1}{3}\gamma, \frac{2}{3}\gamma, \gamma) \mid \gamma \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect}\left((-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1) \right) = \operatorname{Vect}\left((-1, 2, 3)\right).$$

La famille $((-1, 2, 3))$ est donc génératrice du noyau de f, elle est constituée d'un unique vecteur non nul, elle est donc libre et c'est une base du noyau de f.
D'après le théorème du rang, on a alors :

$$\operatorname{rg}(f) = \dim(E) - \dim(\operatorname{Ker}(f)) = 3 - 1 = 2.$$

Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a alors

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \operatorname{Vect}((3, 1, -3), (0, -1, -3), (1, 1, 1))$$

On a $(3, 1, -3) - 3(1, 1, 1) = (0, -2, -6) = 2(0, -1, -3)$ donc

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}((3, 1, -3), (1, 1, 1)).$$

La famille $((3, 1, -3), (1, 1, 1))$ est donc génératrice de l'image de f, elle est de cardinal 2 et comme $\operatorname{rg}(f) = 2$, on peut en conclure que c'est une base de l'image de f.

4. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$. En particulier $x \in \mathrm{Ker}(f)$ donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $x = a(-1,2,3)$. On a également $x \in \mathrm{Im}(f)$ donc il existe $(b,c) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x = b(3,1,-3) + c(1,1,1)$. On a alors :
$$(-a, 2a, 3a) = (3b + c, b + c, -3b + c)$$
On obtient alors le système
$$\begin{cases} a + 3b + c = 0 \\ -2a + b + c = 0 \\ -3a - 3b + c = 0 \end{cases}$$
On échelonne le système : $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1$
$$\begin{cases} a + 3b + c = 0 \\ 7b + 3c = 0 \\ 3b + 4c = 0 \end{cases}$$
Puis $L_3 \leftarrow 7L_3 - 3L_2$,
$$\begin{cases} a + 3b + c = 0 \\ 7b + 3c = 0 \\ 19c = 0 \end{cases}$$
On remonte le système et on obtient $c = b = a = 0$. Ainsi $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.
De plus, d'après le théorème du rang, on a :
$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)).$$
On en conclut donc que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$.
5. Comme on connaît une base de l'image de f, il suffit de voir si chaque vecteur u, v ou w se décompose dans cette base.
   - Pour le vecteur u, on cherche $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u = a(3,1,-3) + b(1,1,1)$. On identifie, on résout le système et on obtient $a = b = \frac{1}{2}$. Ainsi
   $$u = \frac{1}{2}(3,1,-3) + \frac{1}{2}(1,1,1),$$
   donc $u \in \mathrm{Im}(f)$.
   - De même pour le vecteur v, on cherche $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $v = a(3,1,-3) + b(1,1,1)$. On identifie, on résout le système. Dans ce cas, le système n'a pas de solution donc $v \notin \mathrm{Im}(f)$.
   - Comme $u \in \mathrm{Im}(f)$ et $v \notin \mathrm{Im}(f)$, on en déduit que $w \notin \mathrm{Im}(f)$ car sinon comme $\mathrm{Im}(f)$ est un espace vectoriel, u et w dans $\mathrm{Im}(f)$ impliquerait $v \in \mathrm{Im}(f)$ car la famille est liée.
6. Comme seul $u \in \mathrm{Im}(f)$, on en déduit que :
$$F \cap \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(u).$$
La famille (u) est donc génératrice de $F \cap \mathrm{Im}(f)$ et elle est libre car elle est formée d'un unique vecteur non nul. C'est donc une base de $F \cap \mathrm{Im}(f)$. On en déduit que $\dim(F \cap \mathrm{Im}(f)) = 1$.