# Correction des exercices du TD 20

## Table des matières

1 Exercice 2 2
2 Exercice 6 2
3 Exercice 15 2
4 Exercice 17 4
5 Exercice 19 4
6 Exercice 21 5
7 Exercice 22 5
8 Exercice 24 5
9 Exercice 25 6
10 Exercice 26 8

# 1 Exercice 2

1. On a :

$$E_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y - z\right\} = \left\{(2y-z, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\right\} = \mathrm{Vect}((2,1,0),(-1,0,1)).$$

$E_1$ est donc un espace vectoriel en tant que sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. La famille $((2,1,0),(-1,0,1))$ est génératrice de $E_1$ et elle est composée de deux vecteurs non colinéaires, c'est donc une base de $E_1$. On en déduit que $E_1$ est de dimension 2.

2. Commençons par échelonner le système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ 3x & - & y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$

Faisons $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$, on a :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ & & 2y & - & 4z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & 2z \end{array}\right.$$

On a donc :

$$E_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z \quad \text{et} \quad y = 2z\right\} = \left\{(z, 2z, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}((1,2,1)).$$

$E_2$ est donc un espace vectoriel en tant que sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. La famille $((1,2,1))$ est génératrice de $E_2$ et elle est composée d'un unique vecteur non nul, c'est donc une base de $E_2$. On en déduit que $E_2$ est de dimension 1.

3. On a :

$$E_3 = \left\{(x,x,x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}^3\right\} = \mathrm{Vect}((1,1,1)).$$

$E_3$ est donc un espace vectoriel en tant que sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. La famille $((1,1,1))$ est génératrice de $E_3$ et elle est composée d'un unique vecteur non nul, c'est donc une base de $E_3$. On en déduit que $E_3$ est de dimension 1.

# 2 Exercice 6

1. La famille $(P_1, P_2, P_3, P_4)$ est échelonnée en degré et formée de vecteurs de non nuls, c'est donc une famille libre. De plus, elle est de cardinal 4 et $\dim(\mathbb{R}_3[x]) = 4$, c'est donc une base de $\mathbb{R}_3[x]$.
2. La famille de polynômes non nuls échelonnés en degré est libre. De plus, si elle est de cardinal $n+1$, comme $\dim(\mathbb{R}_n[x]) = n+1$, on peut en déduire que c'est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
3. La famille $(P_1, \ldots, P_n)$ est échelonnée en degré car pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\deg(P_k) = k$. De plus, elle est formée de vecteurs de non nuls, c'est donc une famille libre. On remarque qu'elle est de cardinal $n+1$ et comme $\dim(\mathbb{R}_n[x]) = n+1$, on peut en conclure que c'est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

# 3 Exercice 15

1. Soit $(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f)$ alors $f((x,y,z)) = 0_{\mathbb{R}^3}$ et donc $(y-z, z-x, x-y) = (0,0,0)$. On obtient alors le système :

$$(S) \left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & y & - & z & = & 0 \\ -x & & & + & z & = & 0 \\ x & - & y & & & = & 0 \end{array}\right.$$

Echangeons $L_1$ et $L_3$, on obtient

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & & & = & 0 \\ -x & & & + & z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$

Puis faisons $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$, on obtient :

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & & & = & 0 \\ & - & y & + & z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & & & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$

Ainsi :

$$\mathrm{Ker}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y = z\} = \{(z,z,z),\, z \in \mathbb{R}^3\} = \mathrm{Vect}((1,1,1)).$$

La famille $((1,1,1))$ est donc génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$ et elle est libre car composée d'un unique vecteur non nul, c'est donc une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
A l'aide du théorème du rang, on en déduit que :

$$\mathrm{rg}(f) = 3 - 1 = 2.$$

Or

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \mathrm{Vect}((0,-1,1),(1,0,-1),(-1,1,0))$$

On remarque que $f(e_2) + f(e_3) = -f(e_1)$. Ainsi :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2))$$

La famille $((0,-1,1),(1,0,-1))$ est donc génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ et on sait que c'est une base d'après le théorème du rang car elle est de cardinal 2.

2. Soit $(x,y,z,t) \in \mathrm{Ker}(f)$, on a $f((x,y,z,t)) = 0_{\mathbb{R}^3}$ et donc

$$(2x+y+z, x+y+t, x+z-t) = (0,0,0).$$

On obtient alors le système :

$$(\mathcal{S}) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & y & + & z & & & = & 0 \\ x & + & y & & & + & t & = & 0 \\ x & & & + & z & - & t & = & 0 \end{array} \right.$$

On effectue les opérations : $L_2 \leftarrow 2L_2 - L1$ et $L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1$, on a :

$$(\mathcal{S}) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & y & + & z & & & = & 0 \\ & & y & - & z & + & 2t & = & 0 \\ & & -y & + & z & - & 2t & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & y & + & z & & & = & 0 \\ & & y & - & z & + & 2t & = & 0 \end{array} \right.$$

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x & + & y & = & -z \\ & & y & = & z-2t \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -z+t \\ y & = & z-2t \end{array} \right.$$

Ainsi

$$\mathrm{Ker}(f) = \{(-z+t, z-2t, z, t) \mid (z,t) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}((-1,1,1,0),(1,-2,0,1)).$$

La famille $((-1,1,1,0),(1,-2,0,1))$ est donc génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$ et elle est libre car composée de deux vecteurs non colinéaires. C'est donc une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

A l'aide du théorème du rang, on en déduit que :

$$\mathrm{rg}(f) = 4 - 2 = 2.$$

Or

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)) = \mathrm{Vect}((2,1,1),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,-1))$$

On remarque que $(1,1,0) + (1,0,1) = (2,1,1)$ donc :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1,1,0),(1,0,1),(0,1,-1))$$

On remarque aussi que $(1,1,0) - (1,0,1) = (0,1,-1)$ donc :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1,1,0),(1,0,1)).$$

La famille $((1,1,0),(1,0,1))$ est donc génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ et on sait que c'est une base d'après le théorème du rang car elle est de cardinal 2.

3. Soit $P \in \mathrm{Ker}(f)$ alors $f(P) = 0$ soit $(P(0), P'(0), P''(0)) = (0,0,0)$. Posons $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P(x) = ax^2 + bx + c$, on a alors :

$$(c, b, 2a) = (0,0,0).$$

Ainsi $P = 0$ et $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$. L'application $P$ est donc injective. Comme $\dim(\mathbb{R}_2[x]) = \dim(\mathbb{R}^3)$, d'après le théorème du rang, on en déduit que $f$ est bijective. Ainsi une base de l'image est donnée par une base de $\mathbb{R}^3$, par exemple la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

# 4 Exercice 17

1. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$, $\displaystyle\int_0^1 P(t)\mathrm{d}t \in \mathbb{R}$. Il reste donc à montrer que l'application $f$ est linéaire.
   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[x]^2$ alors, en utilisant la linéarité de l'intégrale, on a :
   $$f(\lambda P + Q) = \int_0^1 (\lambda P(t) + Q(t))\mathrm{d}t = \lambda \int_0^1 P(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 Q(t)\mathrm{d}t = \lambda f(P) + f(Q).$$
   Ainsi $\boxed{f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[x], \mathbb{R})}$.
   Déterminons maintenant $\mathrm{Im}(f)$. On a : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}$ donc $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(\mathbb{R})$ soit $\mathrm{rg}(f) \leqslant 1$. Or $f \neq 0$ car par exemple $f(1) = 1$ donc $\mathrm{rg}(f) > 0$. Ainsi $\mathrm{rg}(f) = 1$ et $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}}$.
2. On sait d'ores et déjà grâce au théorème du rang que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = n + 1 - 1 = n$.
   Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathrm{Ker}(f)$, on a alors $f(P) = 0$, en utilisant la linéarité de l'intégrale on obtient :
   $$f(P) = 0 \iff \sum_{k=0}^{n} a_k \int_0^1 t^k \mathrm{d}t = 0 \iff \sum_{k=0}^{n} a_k \left[\frac{t^k}{k+1}\right]_0^1 = 0 \iff \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} = 0.$$
   Grâce à cette égalité, exprimons $a_n$ en fonction des $(a_k)$ pour $k$ variant de $1$ à $n-1$, on a :
   $$a_n = -(n+1)\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{k+1}.$$
   Ainsi
   $$\mathrm{Ker}(f) = \{P = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \mid f(P) = 0\} = \{P = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \mid a_n = -(n+1)\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{k+1}\}$$
   soit
   $$\mathrm{Ker}(f) = \left\{P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k + \left(-(n+1)\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{k+1}\right) x^n \mid, (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n\right\}$$
   soit
   $$\mathrm{Ker}(f) = \left\{P = a_0(1-(n+1)) + a_1(x - \frac{n+1}{2}) + a_2(x^2 - \frac{n+2}{3}) + \ldots + a_{n-1}(x^{n-1} - \frac{n+1}{n}) \mid, (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n\right\}$$
   soit
   $$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\left(1-(n+1), x - \frac{n+1}{2}, x^2 - \frac{n+1}{3}, \ldots, x^{n-1} - \frac{n+1}{n}\right)$$
   On obtient donc que la famille $\left(1-(n+1), x - \frac{n+1}{2}, x^2 - \frac{n+1}{3}, \ldots, x^{n-1} - \frac{n+1}{n}\right)$ est génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$, comme elle est de cardinal $n = \dim(\mathrm{Ker}(f))$, c'est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

# 5 Exercice 19

Commençons par montrer une première inclusion. Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$, il existe alors $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Ainsi $f(y) = f^2(x)$ et comme $f^2 = 0$, on en déduit que $f(y) = 0$ et que donc $y \in \mathrm{Ker}(f)$. On obtient alors la première inclusion.
De plus, d'après le théorème du rang, on a :
$$2n = \mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f).$$
Comme on a supposé que $\mathrm{rg}(f) = n$, on en déduit que $\dim(\mathrm{Ker}(f) = n$. Ainsi :
$$\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f) \quad \text{et} \quad \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(f)).$$
On peut donc en conclure que :
$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)$$

# 6 Exercice 21

1. On a :

$$G = \{P = ax^2+bx+c \mid c = a+b+c = 0\} = \{ax^2+bx+c \mid c = 0 \quad \text{et} \quad a = -b\} = \{-bx^2+bx, b \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((-x^2+x)).$$

   Ainsi $G$ est l'espace engendré par la famille $((-x^2+x))$, c'est donc bien un espace vectoriel.

2. Soit $P \in F \cap G$ alors $P \in F$ donc il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $P = a(x-1)+bx$. De plus, $P \in G$ donc $P(0) = 0$ i.e. $-a = 0$ et $P(1) = 0$ i.e. $b = 0$. Ainsi $P = 0$ et $F \cap G \subset \{0\}$. De plus, $F$ et $G$ sont tous les deux des espaces vectoriels donc $\{0\} \subset F \cap G$. Ainsi $F \cap G = \{0\}$.
   La famille $((x-1,x)$ est génératrice de $F$ et elle est libre car composée de deux vecteurs non colinéaires. C'est donc une base de $F$ et on en déduit que $\dim(F) = 2$.
   La famille $((-x^2+x)$ est génératrice de $G$ et elle est libre car composée d'un unique vecteur non nul. C'est donc une base de $G$ et on en déduit que $\dim(G) = 1$.
   Ainsi
$$\dim(F) + \dim(G) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[x])$$
   Comme on a également montré que $F \cap G = \{0\}$, on en déduit que $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $E$.

# 7 Exercice 22

Soit $(x,y,z) \in F \cap G$, comme $(x,y,z) \in G$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(x,y,z) = \lambda(1,1,0) = (\lambda,\lambda,0)$. De plus, $(x,y,z) \in F$ donc $x+2y-z = 0$ i.e. $\lambda+2\lambda-0 = 0$ i.e. $\lambda = 0$. Ainsi $(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3}$ et $F \cap G \subset \{0\}$. De plus, $F$ et $G$ sont tous les deux des espaces vectoriels donc $\{0\} \subset F \cap G$. Ainsi $F \cap G = \{0\}$.
La famille $((1,1,0))$ est génératrice de $G$ et elle est libre car composée d'un unique vecteur non nul. C'est donc une base de $G$ et on en déduit que $\dim(G) = 1$.
Déterminons une base de $F$ pour calculer sa dimension. On a :

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -2y+z\} = \{(-2y+z,y,z) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}((-2,1,0),(1,0,1)).$$

La famille $((-2,1,0),(1,0,1))$ est génératrice de $F$ et elle est libre car composée de deux vecteurs non colinéaires. C'est donc une base de $F$ et on en déduit que $\dim(F) = 2$.
Ainsi
$$\dim(F) + \dim(G) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$$
Comme on a également montré que $F \cap G = \{0\}$, on en déduit que $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

# 8 Exercice 24

1. On a :
$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 2x+z\} = \{(x,2x+z,z) \mid (x,z) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}((1,2,0),(0,1,1)).$$
   $F$ est donc bien un sev de $\mathbb{R}^3$.
   On a :
$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = -z\} = \{(x,-z,z) \mid (x,z) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}((1,0,0),(0,-1,1)).$$
   $G$ est donc bien un sev de $\mathbb{R}^3$.
2. On remarque que $(1,1,-1) \in F \cap G$ donc $F \cap G \neq \{0\}$. La somme $F+G$ n'est donc pas directe.
3. Commençons par déterminer une base de $F \cap G$. On a :

$$F \cap G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x-y+z = 0 \quad \text{et} \quad y = -z\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -z \quad \text{et} \quad y = -z\} = \mathrm{Vect}((-1,-1,1)).$$

   La famille $((-1,-1,1))$ engendre $F \cap G$ et elle est composée d'un unique vecteur non nul, c'est donc une base de $F \cap G$. D'après la question 1., nous savons que $F$ est de dimension 2 car la famille $((1,2,0),(0,1,1))$ est une base de $F$ (génératrice de $F$ et libre car composée de deux vecteurs non colinéaires). Ainsi pour trouver un supplémentaire $F_1$ de $F \cap G$ dans $F$, il faut compléter la base de $F \cap G$ en une base de $F$ en lui adjoignant un vecteur supplémentaire.

   Le vecteur $(1,0,-2)$ appartient à $F$ et est non colinéaire au vecteur $(-1,-1,1)$ donc la famille $((1,0,-2),(-1,-1,1))$ est libre et de cardinal 2, c'est donc une base de $F$. Ainsi on peut poser :

$$F_1 = \mathrm{Vect}((1,0,-2))$$

   et $F_1$ est alors un supplémentaire de $F \cap G$ dans $F$.

4. D'après la question 1., nous savons que $G$ est de dimension 2 car la famille $((1,0,0),(0,-1,1))$ est une base de $G$ (génératrice de $H$ et libre car composée de deux vecteurs non colinéaires). Ainsi pour trouver un supplémentaire $G_1$ de $F \cap G$ dans $G$, il faut compléter la base de $F \cap G$ en une base de $G$ en lui adjoignant un vecteur supplémentaire.

   Le vecteur $(0,1,-1)$ appartient à $G$ et est non colinéaire au vecteur $(-1,-1,1)$ donc la famille $((0,1,-1),(-1,-1,1))$ est libre et de cardinal 2, c'est donc une base de $G$. Ainsi on peut poser :

$$G_1 = \mathrm{Vect}((0,1,-1))$$

   et $G_1$ est alors un supplémentaire de $F \cap G$ dans $G$.

5. Pour montrer que $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus (F \cap G) \oplus G_1$, montrons que la famille obtenue en concaténant les bases de $F_1$, $F \cap G$ et $G_1$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$.
   D'après les questions précédentes, la famille est la suivante :

$$\mathcal{B} = ((1,0,-2),(-1,-1,1),(0,1,-1)).$$

   Elle est de cardinal 3 qui est la dimension de $\mathbb{R}^3$. Il suffit donc de vérifier que c'est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
   Posons alors $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\lambda_1(1,0,-2) + \lambda_2(-1,-1,1) + \lambda_3(0,1,-1) = (0,0,0).$$

   On obtient alors le système :

$$(\mathcal{S}) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ -2\lambda_1 & + & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

   Effectuons l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$, on a :

$$(\mathcal{S}) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

   Effectuons l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, on a :

$$(\mathcal{S}) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & & - & 2\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

   On obtient alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, la famille est bien libre et c'est une base de $\mathbb{R}^3$. Ainsi $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus (F \cap G) \oplus G_1$.

# 9 Exercice 25

1. En étudiant la liberté de la famille $(u,v,w)$, on se rend compte qu'elle est en fait liée. On a par exemple :

$$2u = v + w.$$

   Ainsi $F = \mathrm{Vect}(u,v)$ et la famille $(u,v)$ est génératrice de $F$. De plus, elle est libre car composée de deux vecteurs non colinéaires. C'est donc une base de $F$.

2. Soient $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$, $(\alpha',\beta',\gamma') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda(\alpha,\beta,\gamma) + (\alpha',\beta',\gamma')) &= f((\lambda\alpha+\alpha',\lambda\beta+\beta',\lambda\gamma+\gamma')) \\ &= (3(\lambda\alpha+\alpha') + \lambda\gamma+\gamma', \lambda\alpha+\alpha' - (\lambda\beta+\beta') + \lambda\gamma+\gamma', -3(\lambda\alpha+\alpha') - 3(\lambda\beta+\beta') + \lambda\gamma+\gamma')) \\ &= \lambda(3\alpha+\gamma, \alpha-\beta+\gamma, -3\alpha-3\beta+\gamma) + (3\alpha'+\gamma', \alpha'-\beta'+\gamma', -3\alpha'-3\beta'+\gamma') \\ &= \lambda f((\alpha,\beta,\gamma)) + f((\alpha',\beta',\gamma')). \end{aligned}$$

   $f$ est donc une application linéaire qui va de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ c'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

3. Soit $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathrm{Ker}(f)$, on a : $f((\alpha,\beta,\gamma)) = (0,0,0)$, on obtient alors le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 3\alpha & + & & & \gamma & = & 0 \\ \alpha & - & \beta & + & \gamma & = & 0 \\ -3\alpha & - & 3\beta & + & \gamma & = & 0 \end{array} \right.$$

On échelonne le système : $L_2 \leftarrow 3L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$. On a :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3\alpha & + & & & \gamma & = & 0 \\ & - & 3\beta & + & 2\gamma & = & 0 \\ & & -3\beta & + & 2\gamma & = & 0 \end{array}\right.$$

soit

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3\alpha & + & & & \gamma & = & 0 \\ & - & 3\beta & + & 2\gamma & = & 0 \end{array}\right.$$

Ainsi $\alpha = -\dfrac{1}{3}\gamma$ et $\beta = \dfrac{2}{3}\gamma$, on a donc

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{(-\frac{1}{3}\gamma, \frac{2}{3}\gamma, \gamma) \mid \gamma \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}\left((-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)\right) = \mathrm{Vect}\left((-1, 2, 3)\right).$$

La famille $((-1, 2, 3))$ est donc génératrice du noyau de $f$, elle est constituée d'un unique vecteur non nul, elle est donc libre et c'est une base du noyau de $f$.
D'après le théorème du rang, on a alors :

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3 - 1 = 2.$$

Notons $(e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a alors

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \mathrm{Vect}((3, 1, -3), (0, -1, -3), (1, 1, 1))$$

On a $(3, 1, -3) - 3(1, 1, 1) = (0, -2, -6) = 2(0, -1, -3)$ donc

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((3, 1, -3), (1, 1, 1)).$$

La famille $((3, 1, -3), (1, 1, 1))$ est donc génératrice de l'image de $f$, elle est de cardinal 2 et comme $\mathrm{rg}(f) = 2$, on peut en conclure que c'est une base de l'image de $f$.

4. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$. En particulier $x \in \mathrm{Ker}(f)$ donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $x = a(-1, 2, 3)$. On a également $x \in \mathrm{Im}(f)$ donc il existe $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x = b(3, 1, -3) + c(1, 1, 1)$. On a alors :

$$(-a, 2a, 3a) = (3b + c, b + c, -3b + c)$$

On obtient alors le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} a & + & 3b & + & c & = & 0 \\ -2a & + & b & + & c & = & 0 \\ -3a & - & 3b & + & c & = & 0 \end{array}\right.$$

On échelonne le système : $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} a & + & 3b & + & c & = & 0 \\ & & 7b & + & 3c & = & 0 \\ & & 3b & + & 4c & = & 0 \end{array}\right.$$

Puis $L_3 \leftarrow 7L_3 - 3L_2$,

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} a & + & 3b & + & c & = & 0 \\ & & 7b & + & 3c & = & 0 \\ & & & & 19c & = & 0 \end{array}\right.$$

On remonte le système et on obtient $c = b = a = 0$. Ainsi $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.
De plus, d'après le théorème du rang, on a :

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

On en conclut donc que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$.

5. Comme on connaît une base de l'image de $f$, il suffit de voir si chaque vecteur $u$, $v$ ou $w$ se décompose dans cette base.
   - Pour le vecteur $u$, on cherche $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u = a(3, 1, -3) + b(1, 1, 1)$. On identifie, on résout le système et on obtient $a = b = \dfrac{1}{2}$. Ainsi

     $$u = \frac{1}{2}(3, 1, -3) + \frac{1}{2}(1, 1, 1),$$

     donc $u \in \mathrm{Im}(f)$.

- De même pour le vecteur $v$, on cherche $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $v = a(3,1,-3) + b(1,1,1)$. On identifie, on résout le système. Dans ce cas, le système n'a pas de solution donc $v \notin \mathrm{Im}(f)$.
- Comme $u \in \mathrm{Im}(f)$ et $v \notin \mathrm{Im}(f)$, on en déduit que $w \notin \mathrm{Im}(f)$ car sinon comme $\mathrm{Im}(f)$ est un espace vectoriel, $u$ et $w$ dans $\mathrm{Im}(f)$ impliquerait $v \in \mathrm{Im}(f)$ car la famille est liée.

6. Comme seul $u \in \mathrm{Im}(f)$, on en déduit que :
$$F \cap \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(u).$$
La famille $(u)$ est donc génératrice de $F \cap \mathrm{Im}(f)$ et elle est libre car elle est formée d'un unique vecteur non nul. C'est donc une base de $F \cap \mathrm{Im}(f)$. On en déduit que $\dim(F \cap \mathrm{Im}(f)) = 1$.

# 10 Exercice 26

1. Soit $y \in \mathrm{Im}(f+g)$ alors il existe $x \in E$ tel que $y = (f+g)(x) = f(x) + g(x)$. Donc $y \in \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$. Ainsi $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$.
On alors $\dim(\mathrm{Im}(f+g)) \leqslant \dim(\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g))$. Or $\dim(\mathrm{Im}(f+g)) = \mathrm{rg}(f+g)$ et d'après la formule de Grassman, on a :
$$\dim(\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)) = \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(g)) - \dim(\mathrm{Im(f)} \cap \mathrm{Im}(g),$$
Comme $\dim(\mathrm{Im(f)} \cap \mathrm{Im}(g) \leqslant 0$, on en déduit que :
$$\dim(\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)) \leqslant \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(g)).$$
En conclusion, $\mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.
2. (a) Soit $y \in \mathrm{Im}(g)$ alors il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$. On a alors $f(y) = f(g(x)) = (f \circ g)(x) = 0$. Donc $y \in \mathrm{Ker}(f)$. On a bien montré l'inclusion $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
   (b) Comme $f+g$ est bijectif, $\mathrm{rg}(f+g) = n$. On obtient alors la minoration $n \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.
   De plus, comme $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(f)$, on en déduit que $\dim(\mathrm{Im}(g)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(f))$. D'après le théorème du rang, on a :
$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f).$$
   Ainsi $\mathrm{rg}(g) \leqslant \dim(E) - \mathrm{rg}(f)$, or $\dim(E) = n$ donc $\mathrm{rg}(g) \leqslant n - \mathrm{rg}(f)$ soit la majoration $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) \leqslant n$.
   On en déduit donc que $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) = n$.