Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 1 (♣)

Montrer que les applications suivantes sont linéaires. Déterminer leur noyau et leur image et le cas échéant, en donner une base.

1. $$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x \\ x \\ x+y \end{pmatrix} \end{array}$$

2. $$f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-2y+3z, 2x-4y+z) \end{array}$$

3. $$f_3 : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 3x-y+2z \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercice 2 (♣)

Soit g l'application linéaire de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \; g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer $g\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right)$, pour tout $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$, le cas échéant, en donner une base.

Exercice 3 (♣)

On pose $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_4[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_4[x] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_4[x])$.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$, le cas échéant en donner une base.

Exercice 4 (♣)

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM - MA \end{array} \right.$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$, le cas échéant en donner une base.

Exercice 5 (♠)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $2f^2 - 3f - 9\,\mathrm{Id}_E = 0$. On pose alors $u = 2f + 3\,\mathrm{Id}_E$ et $v = f - 3\,\mathrm{Id}_E$.

1. Calculer $u - 2v$. En déduire que $E = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$.
2. Calculer $u \circ v$ et $v \circ u$. En déduire que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$ et $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(u)$.
3. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Ker}(v)$.

Exercice 6 (♠)

Soit E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie, et soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$.

1. Montrer que $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \mathrm{rg}(g)$.
2. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de $\mathrm{Im}(f)$. Montrer que $(g(e_1), \ldots, g(e_p))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(g \circ f)$. En déduire que $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \mathrm{rg}(f)$.
3. Montrer que $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \min(\mathrm{rg}(g), \mathrm{rg}(f))$.

Exercice 7 (♠♠)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

1. Montrer que si φ est une forme linéaire non nulle de E, alors $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan.
2. Réciproquement, soit H un hyperplan de E.
   (a) Soit $a \notin H$. Montrer que :
   $$E = H \oplus \mathrm{Vect}(a).$$
   Pour tout $x \in E$, il existe donc un unique couple $(y, \lambda_x) \in H \times \mathbb{R}$ tel que :
   $$x = y + \lambda_x a.$$
   (b) On définit l'application $\varphi : E \to \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \lambda_x$ pour tout $x \in E$. Montrer que φ est une forme linéaire de E.
   (c) Montrer que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Conclure.
3. **Application.** Montrer que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \oplus \mathrm{Vect}(I_n)$.