Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 1 (♣)

Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telles qu'il existe a, b et c réels pour lesquels :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (ax^2 + bx + c)\cos(x).$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de F et donner sa dimension.

Exercice 2 (♥)

Dans chaque cas, montrer que les ensembles E_i sont des espaces vectoriels puis donner leur dimension.

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y+z = 0$ et $3x-y-z = 0\}$
3. $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$

Exercice 3 (♣)

Dans $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, on pose $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ puis $F = \mathrm{Vect}(u, v, w)$ et $G = \mathrm{Vect}(x, y)$. Quelles sont les dimensions de F, G, $F + G$ et $F \cap G$?

Exercice 4 (♣)

Montrer que $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 1, 1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5 (♣)

Soit E un espace vectoriel de dimension 3. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On pose

$$\varepsilon_1 = e_2 + 2e_3,\ \varepsilon_2 = e_3 - e_1, \varepsilon_3 = e_1 + 2e_2.$$

Montrer que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de E.

Exercice 6 (♥)

1. Montrer que $P_1(x) = 1$, $P_2(x) = 1 + x$, $P_3(x) = 1+x+x^2$ et $P_4(x) = 1+x+x^2+x^3$ forment une base de $\mathbb{R}_3[x]$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que toute famille de $n + 1$ polynômes non nuls de degrés distincts est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
3. Montrer que la famille de polynômes définis par
$$P_k(x) = (x - 1)^k, \quad \text{pour tout } k \in [\![0, n]\!]$$
est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

Exercice 7 (♣)

On définit les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$: $a = (1, 2, 1, 3)$, $b = (3, 3, 2, 6)$, $c = (1, 2, 3, 4)$ et $d = (-1, 1, 2, 1)$.

1. Déterminer le rang de la famille (a, b, c, d).
2. Déterminer une base de $F = \mathrm{Vect}(a, b, c, d)$ et la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 8 (♦)

Dans $\mathcal{F}(]-1, 1[, \mathbb{R})$, on considère :

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad f_2(x) = \frac{1-x}{1+x},$$

$$f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad f_4(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Quel est le rang de la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) ?

Exercice 9 (♣)

Déterminer le rang de la famille $(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$ où $P_1 = x^3-2x^2$, $P_2 = x^3-x^2+2x+2$, $P_3 = x+2$, $P_4 = x^2+x$ et $P_5 = x^2 - 2$.

Exercice 10 (♣)

Montrer que les applications suivantes sont linéaires. Déterminer leur noyau et leur image et le cas échéant, en donner une base.

1. $$\begin{array}{rccc} f_1 : & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x \\ x \\ x+y \end{pmatrix} \end{array}$$
2. $$\begin{array}{rccc} f_2 : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y, z) & \longmapsto & (x - 2y + 3z, 2x - 4y + z) \end{array}$$
3. $$\begin{array}{rccc} f_3 : & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & (3x - y + 2z) \end{array}$$

Exercice 11 (♣)

Soit g l'application linéaire de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer $g\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right)$, pour tout $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$, le cas échéant, en donner une base.

Exercice 12 (♣)

On pose $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_4[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_4[x] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_4[x])$.
2. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$, le cas échéant en donner une base.

Exercice 13 (♣)

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM - MA \end{array} \right.$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$.
2. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$, le cas échéant en donner une base.

Exercice 14 (♣)

Justifier qu'il existe une unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$f(1,0,0) = (0,1),\ f(1,1,0) = (1,0) \text{ et } f(1,1,1) = (1,1).$$

Exprimer $f(x,y,z)$ et déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 15 (♥)

Déterminer une base du noyau et une base de l'image des applications linéaires suivantes :

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (y-z, z-x, x-y)$
2. $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par
$$f(x,y,z,t) = (2x+y+z, x+y+t, x+z-t)$$
3. $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(P) = (P(0), P'(0), P''(0))$

Exercice 16 (♠)

Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ des éléments deux à deux distincts de $\mathbb{R}$. Montrer que l'application $\phi : \mathbb{R}_n[x] \mapsto \mathbb{R}^{n+1}$ telle que $\phi(P) = (P(a_0), \dots, P(a_n))$ est un isomorphisme.

Exercice 17 (♠)

Soit f l'application définie de $\mathbb{R}_n[x]$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(P(x)) = \int_0^1 P(t)\mathrm{d}t.$$

1. Vérifier que f est une forme linéaire et déterminer $\operatorname{Im}(f)$.
2. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(f)$.

Exercice 18 (♠)

Soit l'espace

$$E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n\}$$

et l'application $T : E \mapsto \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\forall u \in E,\ T(u) = (u_0, u_1, u_2).$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. Montrer que T est un isomorphisme et en déduire la dimension de E.
3. Trouver trois suites géométriques éléments de E et en déduire une base de E. Quelle forme ont les suites de E ?

Exercice 19 (♥)

Soient E un espace vectoriel de dimension finie $2n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = 0$ et $\operatorname{rg}(f) = n$. Montrer que $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Im}(f)$.

Exercice 20 (♣)

Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer une base et un supplémentaire des sous-espaces vectoriels suivants :

1. $F = \operatorname{Vect}(u,v)$ avec $u = (1,1,0)$ et $v = (2,1,1)$
2. $F = \operatorname{Vect}(u,v,w)$ avec $u = (-1,1,0)$ et $v = (2,0,1)$ et $w = (1,1,1)$
3. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$

Exercice 21 (♥)

Soit $E = \mathbb{R}_2[x]$. On pose $F = \operatorname{Vect}(x-1, x)$ et $G = \{P \in E \mid P(0) = P(1) = 0\}$.

1. Montrer que G est un espace vectoriel.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

Exercice 22 (♥)

Montrer que $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$ et $G = \operatorname{Vect}((1,1,0))$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 23 (♣)

Soient D une droite vectorielle et H un hyperplan d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. A quelle condition H et D sont-ils supplémentaires ?

Exercice 24 (♥)

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on donne :

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\}$$

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + z = 0\}.$$

1. Vérifier que F et G sont des sev de $\mathbb{R}^3$.
2. La somme $F + G$ est-elle directe ?
3. Déterminer un sous-espace supplémentaire de $F \cap G$ dans F, que l'on notera F_1.
4. Déterminer un sous-espace supplémentaire de $F \cap G$ dans G, que l'on notera G_1.
5. (♠) Prouver que $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus (F \cap G) \oplus G_1$.

Exercice 25 (♥)

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs

$$u=(2,1,-1),\ v=(1,-1,3),\ w=(3,3,-5).$$

On note $F=\operatorname{Vect}(u,v,w)$.

1. Déterminer une base de F.
2. Soit $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ l'application définie pour des réels α,β,γ par
$$f((\alpha,\beta,\gamma))=(3\alpha+\gamma,\alpha-\beta+\gamma,-3\alpha-3\beta+\gamma).$$
Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(f)$ et une base de $\operatorname{Im}(f)$. Préciser le rang de f.
4. A-t-on $\mathbb{R}^3=\operatorname{Ker}(f)\oplus\operatorname{Im}(f)$?
5. Les vecteurs u,v,w sont-ils des éléments de $\operatorname{Im}(f)$?
6. Déterminer une base et la dimension de $F\cap\operatorname{Im}(f)$.

Exercice 26 (♠)

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n, f et g deux endomorphismes de E.

1. Montrer que $\operatorname{Im}(f+g)\subset\operatorname{Im}(f)+\operatorname{Im}(g)$. En déduire que $\operatorname{rg}(f+g)\leq\operatorname{rg}(f)+rg(g)$.
2. On suppose que $f\circ g=0$ et que $f+g$ est bijectif.
   (a) Montrer que $\operatorname{Im}(g)\subset\operatorname{Ker}(f)$.
   (b) En déduire que $\operatorname{rg}(f)+\operatorname{rg}(g)=n$.

Exercice 27 (♠)

Soit E,F,G trois espaces vectoriels de dimension finie, et soient $f\in\mathcal{L}(E,F)$ et $g\in\mathcal{L}(F,G)$.

1. Montrer que $\operatorname{rg}(g\circ f)\leq\operatorname{rg}(g)$.
2. Soit $(e_1,\ldots,e_p)$ une base de $\operatorname{Im}(f)$. Montrer que $(g(e_1),\ldots,g(e_p))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im}(g\circ f)$. En déduire que $\operatorname{rg}(g\circ f)\leq\operatorname{rg}(f)$.
3. Montrer que $\operatorname{rg}(g\circ f)\leq\min(\operatorname{rg}(g),\operatorname{rg}(f))$.

Exercice 28 (♠)

Soit E un espace vectoriel de dimension $n\geq 1$. Soit f un endomorphisme nilpotent : c'est à dire qu'il existe $p\in\mathbb{N}^*$ tel que $f^p=0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{p-1}\neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Montrer qu'il existe $x\in E$ tel que la famille $(x,f(x),\ldots,f^{p-1}(x))$ soit libre.
2. En déduire que $f^n=0_{\mathcal{L}(E)}$.

Exercice 29 (♠♠)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n\geq 1$.

1. Montrer que si φ est une forme linéaire non nulle de E, alors $H=\operatorname{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan.
2. Réciproquement, soit H un hyperplan de E.
   (a) Soit $a\notin H$. Montrer que :
   $$E=H\oplus\operatorname{Vect}(a).$$
   Pour tout $x\in E$, il existe donc un unique couple $(y,\lambda_x)\in H\times\mathbb{R}$ tel que :
   $$x=y+\lambda_x a.$$
   (b) On définit l'application $\varphi:E\to\mathbb{R}$ par $\varphi(x)=\lambda_x$ pour tout $x\in E$. Montrer que φ est une forme linéaire de E.
   (c) Montrer que $H=\operatorname{Ker}(\varphi)$. Conclure.
3. **Application.** Montrer que $\operatorname{Ker}(\operatorname{Tr})$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})=\operatorname{Ker}(\operatorname{Tr})\oplus\operatorname{Vect}(I_n)$.

♣ Du trèfle à brouter…
♥ À connaître par coeur.
♠ Qui s'y frotte s'y pique !
♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau !