

Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 1 (♣)

Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telles qu'il existe a, b et c réels pour lesquels :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (ax^2 + bx + c) \cos(x).$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de F et donner sa dimension.

Exercice 2 (♥)

Dans chaque cas, montrer que les ensembles E_i sont des espaces vectoriels puis donner leur dimension.

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0 \text{ et } 3x - y - z = 0\}$
3. $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$

Exercice 3 (♣)

Dans $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, on pose $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ puis $F = \text{Vect}(u, v, w)$ et

$G = \text{Vect}(x, y)$. Quelles sont les dimensions de F , G , $F + G$ et $F \cap G$?

Exercice 4 (♠)

Soit l'espace

$$E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n\}$$

et l'application $T : E \mapsto \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\forall u \in E, T(u) = (u_0, u_1, u_2).$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. Montrer que T est un isomorphisme et en déduire la dimension de E .
3. Trouver trois suites géométriques éléments de E et en déduire une base de E . Quelle forme ont les suites de E ?

Exercice 5 (♣)

Montrer que $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 1, 1)$ forment une base de \mathbb{R}^3 .

Exercice 6 (♣)

Soit E un espace vectoriel de dimension 3. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E . On pose

$$\varepsilon_1 = e_2 + 2e_3, \varepsilon_2 = e_3 - e_1, \varepsilon_3 = e_1 + 2e_2.$$

Montrer que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de E .

Exercice 7 (♥)

1. Montrer que $P_1(x) = 1$, $P_2(x) = 1 + x$, $P_3(x) = 1 + x + x^2$ et $P_4(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ forment une base de $\mathbb{R}_3[x]$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que toute famille de $n + 1$ polynômes non nuls de degrés distincts est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
3. Montrer que la famille de polynômes définis par $P_k(x) = (x - 1)^k$, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

Exercice 8 (♣)

On définit les vecteurs suivants de \mathbb{R}^4 : $a = (1, 2, 1, 3)$, $b = (3, 3, 2, 6)$, $c = (1, 2, 3, 4)$ et $d = (-1, 1, 2, 1)$.

1. Déterminer le rang de la famille (a, b, c, d) .
2. Déterminer une base de $F = \text{Vect}(a, b, c, d)$ et la compléter en une base de \mathbb{R}^4 .

Exercice 9 (♦)

Dans $\mathcal{F}(-1, 1[, \mathbb{R})$, on considère :

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad f_2(x) = \frac{1-x}{1+x},$$

$$f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad f_4(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Quel est le rang de la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) ?

Exercice 10 (♣)

Déterminer le rang de la famille $(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$ où $P_1 = x^3 - 2x^2$, $P_2 = x^3 - x^2 + 2x + 2$, $P_3 = x + 2$, $P_4 = x^2 + x$ et $P_5 = x^2 - 2$.

Exercice 11 (♠)

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n , f et g deux endomorphismes de E .

1. Montrer que $\text{Im}(f + g) \subset \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$. En déduire que $\text{rg}(f + g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$.
2. On suppose que $f \circ g = 0$ et que $f + g$ est bijectif.
 - (a) Montrer que $\text{Im}(g) \subset \text{Ker}(f)$.
 - (b) En déduire que $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) = n$.

Exercice 12 (♥)

Soient E un espace vectoriel de dimension finie $2n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = 0$ et $\text{rg}(f) = n$. Montrer que $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$.

Exercice 13 (♠)

Soient f et g deux endomorphismes de E (espace vectoriel de dimension finie). Montrer que

$$\text{rg}(f \circ g) \leq \min(\text{rg}(f), \text{rg}(g)).$$

Exercice 14 (♣)

Justifier qu'il existe une unique application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 telle que :

$$f(1, 0, 0) = (0, 1), f(1, 1, 0) = (1, 0) \text{ et } f(1, 1, 1) = (1, 1).$$

Exprimer $f(x, y, z)$ et déterminer le noyau et l'image de f .

Exercice 15 (♥)

Déterminer une base du noyau et une base de l'image des applications linéaires suivantes :

- $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (y-z, z-x, x-y)$
- $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z, t) = (2x + y + z, x + y + t, x + z - t)$$

- $f : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(P) = (P(0), P'(0), P''(0))$

Exercice 16 (♠)

Soient a_0, a_1, \dots, a_n des éléments deux à deux distincts de \mathbb{R} . Montrer que l'application $\phi : \mathbb{R}_n[x] \mapsto \mathbb{R}^{n+1}$ telle que $\phi(P) = (P(a_0), \dots, P(a_n))$ est un isomorphisme.

Exercice 17 (♠)

Soit f l'application définie de $\mathbb{R}_n[x]$ dans \mathbb{R} par

$$f(P(x)) = \int_0^1 P(t) dt.$$

- Vérifier que f est une forme linéaire et déterminer $\text{Im}(f)$.
- Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$.

Exercice 18 (♣)

Dans \mathbb{R}^3 , déterminer une base et un supplémentaire des sous-espaces vectoriels suivants :

- $F = \text{Vect}(u, v)$ avec $u = (1, 1, 0)$ et $v = (2, 1, 1)$
- $F = \text{Vect}(u, v, w)$ avec $u = (-1, 1, 0)$ et $v = (2, 0, 1)$ et $w = (1, 1, 1)$
- $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$

Exercice 19 (♥)

Soit $E = \mathbb{R}_2[x]$. On pose $F = \text{Vect}(x - 1, x)$ et $G = \{P \in E \mid P(0) = P(1) = 0\}$.

- Montrer que G est un espace vectoriel.
- Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .

Exercice 20 (♥)

Montrer que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$ et $G = \text{Vect}((1, 1, 0))$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .

Exercice 21 (♣)

Soient D une droite vectorielle et H un hyperplan d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. A quelle condition H et D sont-ils supplémentaires ?

Exercice 22 (♥)

Dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 , on donne :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\}$$

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + z = 0\}.$$

- Vérifier que F et G sont des sev de \mathbb{R}^3 .
- La somme $F + G$ est-elle directe ?
- Déterminer un sous-espace supplémentaire de $F \cap G$ dans F , que l'on notera F_1 .
- Déterminer un sous-espace supplémentaire de $F \cap G$ dans G , que l'on notera G_1 .
- Prouver que $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus (F \cap G) \oplus G_1$.

Exercice 23 (♥)

Dans \mathbb{R}^3 , on considère les vecteurs

$$u = (2, 1, -1), v = (1, -1, 3), w = (3, 3, -5).$$

On note $F = \text{Vect}(u, v, w)$.

- Déterminer une base de F .
- Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie pour des réels α, β, γ par

$$f((\alpha, \beta, \gamma)) = (3\alpha + \gamma, \alpha - \beta + \gamma, -3\alpha - 3\beta + \gamma).$$
 Montrer que f est un endomorphisme de \mathbb{R}^3 .
- Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$ et une base de $\text{Im}(f)$. Préciser le rang de f .
- A-t-on $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$?
- Les vecteurs u, v, w sont-ils des éléments de $\text{Im}(f)$?
- Déterminer une base et la dimension de $F \cap \text{Im}(f)$.

Exercice 24 (♠)

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Soit f un endomorphisme nilpotent : c'est à dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

- Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ soit libre.
- En déduire que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

♣ Du trèfle à brouter...
♥ À connaître par coeur.

♠ Qui s'y frotte s'y pique!
♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau !