Exemples de suites réelles

Exercice 1 (♣)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = n^2 - n + 1$.

1. Calculer u_0 et u_{10}.
2. Exprimer $u_n + 1$ et u_{n+1} en fonction de n.

Exercice 2 (♣)

Dans chacun des cas, étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par

1. $u_n = \dfrac{1}{n}$
2. $u_n = \dfrac{n^2+1}{n}$
3. $u_n = \ln(n)$
4. $u_n = \dfrac{3^n}{n}$

Exercice 3 (♣)

Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

1. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2$
2. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \mathrm{e}^{u_n}$
3. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \ln(1 + |u_n|)$

Exercice 4 (♣)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{3n+1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 3.
2. En déduire qu'elle est bornée.

Exercice 5 (♣)

Les suites suivantes sont-elles minorées, majorées, bornées, monotones ?

1. $u_n = \mathrm{e}^n$
2. $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$
3. $w_n = 2 - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$

Exercice 6 (♣)

Pour chacune des suites suivantes, donner le terme général puis calculer la somme des dix premiers termes consécutifs :

1. $v_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_{n+1} = v_n - 1$.
2. $d_3 = 6$ et $\forall n \geq 3, \qquad d_{n+1} = d_n + 5$.

Exercice 7 (♣)

Pour chacune des suites suivantes, donner le terme général puis calculer la somme des dix premiers termes consécutifs :

1. $v_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N} \qquad 3v_{n+1} = v_n$.
2. $w_0 = 6$ et $\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad w_n = \frac{w_{n-1}}{2}$.

Exercice 8 (♥)

Dans chacun des cas, exprimer u_n en fonction de n puis exprimer $\displaystyle\sum_{k=0 \text{ ou } 1}^{n} u_k$ en fonction de n.

1. $$\begin{cases} u_0 = -2, \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = -2u_n + 3. \end{cases}$$
2. $$\begin{cases} u_1 = -1, \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1. \end{cases}$$
3. $$\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad 2u_n = 3u_{n-1} + 1. \end{cases}$$

Exercice 9 (♥)

Dans chacun des cas, exprimer u_n en fonction de n :

1. $$\begin{cases} u_0 = 2 \quad u_1 = 5, \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = -u_{n+1} + 6u_n. \end{cases}$$
2. $$\begin{cases} u_0 = 1 \quad u_1 = 2, \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad 4u_{n+1} = 4u_n - u_{n-1}. \end{cases}$$
3. $$\begin{cases} u_0 = 0 \quad u_1 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} - u_{n+1} - u_n = 0. \end{cases}$$

Exercice 10 (♠)

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont définies par les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \qquad v_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 3u_n + 2v_n, \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = u_n + 2v_n. \end{cases}$$

On se propose de déterminer les expressions de u_n et de v_n en fonction de n. Pour cela, démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, en déduire u_n en fonction de n puis v_n en fonction de n.

Exercice 11 (♠)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 3^n$.

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = \dfrac{u_n}{3^n}$ est arithmético-géométrique.
2. En déduire une expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

Exercice 12 (♥)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = -2u_n + 3n + 2. \end{cases}$$

On pose : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n - n - \dfrac{1}{3}$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3, v_1, v_2 et v_3.
2. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
3. Exprimer v_n en fonction de n.
4. Exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 13 (♠)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2, \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n - 2u_{n+1} = 2n + 3. \end{cases}$$

Soit $b \in \mathbb{R}$. On pose : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n + b \times n - 1$.

1. Déterminer b pour que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit géométrique.
2. Exprimer v_n en fonction de n.
3. Exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 14 (♥ ♦)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 3 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}.$$

Le but de l'exercice est d'exprimer u_n en fonction de n.

1. Montrer que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{1 + u_n}{2 - 2u_n}.$$
Montrer que la suite (v_n) est géométrique. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
3. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_n \neq -\frac{1}{2}.$$
puis exprimer u_n en fonction de v_n.
4. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Remarque : on admet (provisoirement) le fait que les suites (u_n) et (v_n) soient définies pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Exercice 15 (♠)

Déterminer les suites bornées vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0.$$

Exercice 16 (♠)

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = (u_n)^3$.
Pour étudier cette suite, on introduit la suite auxiliaire $v_n = \ln(u_n)$ pour tout $n \geq 0$.

1. On admet que v_n est bien défini pour tout n. Quelle est la nature de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. Déterminer alors l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

♣ Du trêfle à brouter...
♥ À connaître par coeur.
♠ Qui s'y frotte s'y pique !
♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau !