

Rappels et logique

Indications pour les exercices ♠

Les indications sont à utiliser progressivement : ne lire l'indication suivante que si la précédente ne suffit pas à vous débloquer.

Exercice 5

On considère

$$K = \{a + b\sqrt{2} \mid (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}.$$

Indication 1. Pour montrer que $x - y$ et xy appartiennent à K , écrire

$$x = a + b\sqrt{2} \quad \text{et} \quad y = c + d\sqrt{2},$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, puis développer.

Indication 2. Pour l'inverse, si

$$x = a + b\sqrt{2} \neq 0,$$

chercher à faire disparaître $\sqrt{2}$ du dénominateur de

$$\frac{1}{a + b\sqrt{2}}.$$

Indication 3. Multiplier le numérateur et le dénominateur par le conjugué

$$a - b\sqrt{2}.$$

Il restera à vérifier que le dénominateur obtenu est non nul.

Exercice 11

Les équations proposées contiennent uniquement des puissances **paires** de x .

Indication 1. Effectuer le changement d'inconnue

$$X = x^2.$$

On obtient alors une équation du second degré en X .

Indication 2. Attention : puisque $X = x^2$, on a nécessairement

$$X \geq 0.$$

Toutes les solutions de l'équation en X ne fournissent donc pas nécessairement des solutions en x .

Indication 3. Une fois les valeurs admissibles de X obtenues, revenir à x en résolvant

$$x^2 = X.$$

Pour la dernière équation, commencer par préciser que $x \neq 0$, puis multiplier l'égalité par x^2 .

Exercice 14

1. Pour l'équation

$$\sqrt{x-3} + 2 = 9,$$

commencer par déterminer pour quelles valeurs de x la racine carrée est définie. Isoler ensuite la racine carrée avant d'élever au carré.

2. Pour l'équation

$$3\sqrt{x+3} - 6 = x - 2 :$$

Indication 1. Commencer par déterminer le domaine de définition puis isoler la racine :

$$3\sqrt{x+3} = x + 4.$$

Indication 2. Le membre de gauche étant positif ou nul, quelle condition supplémentaire doit vérifier $x + 4$?

Indication 3. On peut maintenant élever les deux membres au carré. On obtient une équation du second degré.

Attention. Une élévation au carré peut introduire des solutions parasites : vérifier les solutions obtenues dans l'équation initiale.

Exercice 18

Pour une inéquation comportant une racine carrée, commencer toujours par déterminer son **domaine de définition**.

1. Pour

$$\sqrt{2x-5} \leq 5,$$

sur le domaine de définition, les deux membres sont positifs. On peut donc élever les deux membres au carré sans changer le sens de l'inégalité.

2. Pour

$$\sqrt{x+2} \leq -1,$$

avant de calculer, comparer simplement les signes des deux membres.

Que sait-on de

$$\sqrt{x+2}$$

sur son domaine de définition ?

3. Pour

$$\sqrt{5-x} \geq x + 1 :$$

Indication 1. Commencer par déterminer le domaine de définition.

Indication 2. Distinguer deux cas suivant le signe de $x + 1$.

Si $x + 1 \leq 0$, l'inégalité est-elle automatiquement vérifiée ?

Si $x + 1 > 0$, les deux membres sont positifs : on peut alors élever au carré.

Exercice 19 – Question 2

On dispose, d'après la question précédente, de

$$e^x \geq 1 + x$$

pour tout réel x .

L'objectif est de montrer que

$$e^{t^2} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq 1.$$

Indication 1. Appliquer l'inégalité de la question 1 à un réel bien choisi faisant intervenir $\frac{t^2}{n}$.

Indication 2. Essayer d'obtenir une majoration de

$$1 - \frac{t^2}{n}$$

par une exponentielle.

Indication 3. Pourquoi l'hypothèse

$$t \in [0, \sqrt{n}]$$

est-elle utile lorsque l'on élève cette inégalité à la puissance n ?

Il ne reste ensuite qu'à simplifier un produit d'exponentielles.

Exercice 30

On veut montrer :

Si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 4, alors n est pair.

Indication 1. Une démonstration directe n'est pas forcément la plus naturelle. Penser à la **contraposée**.

Indication 2. La contraposée consiste ici à supposer que n est impair et à montrer que

$$n^2 - 1$$

est divisible par 4.

Indication 3. Si n est impair, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n = 2k + 1.$$

Calculer alors $n^2 - 1$ et factoriser par 4.

Exercice 31

On cherche toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

Pour alléger les calculs, on pourra noter $P(x, y)$ l'égalité précédente.

Indication 1. Comme suggéré dans l'énoncé, commencer par choisir des valeurs très simples de x et y . Que donne $P(0, 0)$?

On doit obtenir une équation portant uniquement sur $f(0)$.

Indication 2. L'équation obtenue donne a priori deux possibilités pour $f(0)$. Utiliser ensuite $P(x, 0)$, valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, afin d'en éliminer une. On doit ainsi montrer que

$$f(0) = 1.$$

Indication 3. Reprendre alors l'égalité $P(x, 0)$. Puisque $f(0)$ est désormais connu, elle permet de déterminer directement $f(x)$ en fonction de x .

Indication 4. Une fonction candidate a été obtenue. Le raisonnement n'est pas terminé : il faut vérifier qu'elle satisfait effectivement

$$f(x)f(y) - f(xy) = x + y$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

Cette dernière vérification permet de conclure qu'il s'agit bien de l'unique solution.

Exercice 32 (♠♠)

Dans cet exercice, il ne s'agit pas de faire des calculs, mais de **traduire correctement l'ordre des quantificateurs**.

On rappelle que

$$T(g, b, h)$$

signifie : « le gibbon g lance la banane b au gibbon h ».

Indication 1. Commencer par repérer le **premier quantificateur** de chaque proposition.

Par exemple, une proposition commençant par

$$\forall g \in G$$

doit correspondre à une phrase concernant **chaque gibbon**, tandis qu'une proposition commençant par

$$\exists g \in G$$

affirme seulement l'existence d'**au moins un gibbon**.

Indication 2. Faire de même avec la variable b .

Ainsi,

$$\forall b \in B$$

signifie que l'affirmation concerne **toutes les bananes**, tandis que

$$\exists b \in B$$

signifie qu'il existe **une banane** pour laquelle l'affirmation est vraie.

Indication 3. Attention : l'**ordre des quantificateurs est essentiel**.

Par exemple, les deux propositions

$$\exists g \in G, \forall b \in B, \dots$$

et

$$\forall b \in B, \exists g \in G, \dots$$

n'ont pas le même sens.

Dans la première, il existe **un même gibbon** qui convient pour toutes les bananes.

Dans la seconde, le gibbon peut **dépendre de la banane** considérée.

Indication 4. Pour les propositions qui vous semblent difficiles, les traduire d'abord littéralement, quantificateur après quantificateur.

Par exemple, une expression de la forme

$$\exists g \in G, \forall b \in B, \exists h \in G, T(g, b, h)$$

peut se lire successivement :

« Il existe un gibbon g tel que,

pour toute banane b ,

il existe un gibbon h auquel g lance b . »

Chercher ensuite parmi les phrases proposées celle qui exprime cette idée en langage courant.

Indication 5. Pour distinguer les propositions les plus proches, se demander systématiquement :

- le gibbon qui lance est-il fixé ou peut-il changer ?
- la banane est-elle fixée ou peut-elle changer ?
- le gibbon qui reçoit est-il fixé ou peut-il changer ?
- l'affirmation concerne-t-elle **au moins un** objet ou **tous** les objets ?

Méthode. Une bonne stratégie consiste à commencer par les propositions comportant trois quantificateurs identiques ou presque identiques : elles sont généralement les plus faciles à traduire.

Procéder ensuite par élimination pour les propositions dans lesquelles alternent les symboles $\forall$ et $\exists$.