Correction partielle du TD 1 : Rappels et logique

Table des matières

1 Exercice 1

Il s'agit dans cet exercice d'appliquer les règles de manipulation des fractions tout en faisant bien attention aux règles de priorité de calcul.

- $A = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{6 \times 1}{6 \times 2} - \frac{4 \times 1}{4 \times 3} + \frac{3 \times 1}{3 \times 4} = \frac{6}{12} - \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{6-4+3}{12} = \frac{5}{12}$
- $B = 2 - \frac{13}{7} + \left(1 + \frac{5}{2}\right) = 2 - \frac{13}{7} + \left(\frac{2}{2} + \frac{5}{2}\right) = 2 - \frac{13}{7} + \frac{7}{2} = \frac{28}{14} - \frac{26}{14} + \frac{49}{14} = \frac{51}{14}$
- $C = \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right) + 3\left(\frac{4}{5} - \frac{5}{6}\right) = \left(\frac{8}{12} - \frac{9}{12}\right) + 3\left(\frac{24}{30} - \frac{25}{30}\right) = -\frac{1}{12} + 3 \times \left(-\frac{1}{30}\right)$
  $= -\frac{1}{12} - \frac{3}{30} = -\frac{5}{60} - \frac{6}{60} = -\frac{11}{60}$
- $D = \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{3}\right) \times \left(3 + \frac{7}{4}\right) \div \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{6}\right) = \left(\frac{3}{6} + \frac{10}{6}\right) \times \left(\frac{12}{4} + \frac{7}{4}\right) \div \left(\frac{3}{6} - \frac{5}{6}\right) = \frac{13}{6} \times \frac{19}{4} \div \frac{-2}{6}$
  $= \frac{13}{\cancel{6}} \times \frac{19}{4} \times \frac{\cancel{6}}{-2} = \frac{13 \times 19}{4 \times (-2)} = -\frac{247}{8}$
- $E = \dfrac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{\cancel{4}}{5} \times \frac{3}{\cancel{4}}}{\frac{2}{5} \times \frac{4}{3} + \frac{1}{3}} = \dfrac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{3}{5}}{\frac{8}{15} + \frac{1}{3}} = \dfrac{\frac{40}{60} + \frac{45}{60} - \frac{36}{60}}{\frac{8}{15} + \frac{5}{15}} = \dfrac{\frac{49}{60}}{\frac{13}{15}} = \frac{49}{60} \times \frac{15}{13} = \frac{49}{4 \times \cancel{15}} \times \frac{\cancel{15}}{13} = \frac{49}{52}$

2 Exercice 2

- $A(x) = \frac{3\cancel{(x+1)}}{2\cancel{(x+1)}(x+2)} = \frac{3}{2(x+2)}$
- $B(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x} = \frac{x^2}{2x} + \frac{4}{2x} = \frac{x^2+4}{2x}$
- $C(x) = \frac{1}{2x-1} + \frac{x}{x+1} + \frac{x^2}{4x-2} = \frac{2(x+1)}{2(x+1)(2x-1)} + \frac{2x(2x-1)}{2(x+1)(2x-1)} + \frac{x^2(x+1)}{2(x+1)(2x-1)}$
  $= \frac{2x+2+4x^2-2x+x^3+x^2}{2(x+1)(2x-1)} = \frac{x^3+5x^2+2}{2(x+1)(2x-1)}$
- $D(x) = \frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-2} + \frac{8}{x^2-4} = \frac{2(x-2)}{(x+2)(x-2)} - \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} + \frac{8}{(x+2)(x-2)}$
  $= \frac{2x-4-x-2+8}{(x+2)(x-2)} = \frac{\cancel{x+2}}{\cancel{(x+2)}(x-2)} = \frac{1}{x-2}$

3 Exercice 3

Il s'agit dans cet exercice d'appliquer les règles de calculs sur les puissances.

- $A = 3^2 \times 3^{-4} \times 3^7 \times 3 = 3^{2-4+7+1} = 3^6$
- $B = \frac{2 \times 2^2 \times 2^3}{2^4 \times 2^5} = \frac{2^{1+2+3}}{2^{4+5}} = \frac{2^6}{2^9} = 2^{6-9} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3}$
- $C = (2 \times 3^2 \times 3^3)^4 = (2 \times 3^5)^4 = 2^4 \times (3^5)^4 = 2^4 \times 3^{5\times 4} = 2^4 \times 3^{20}$
- $D = \frac{2^3 \times 5^4 \times 7^3}{5^3 \times 7^2 \times 2} = 2^{3-1} \times 5^{4-3} \times 7^{3-2} = 2^2 \times 5 \times 7$
- $E = 81^5 \times (3^{-2})^{-5} \times \frac{1}{9} = (3^4)^5 \times (3^{-2})^{-5} \times \frac{1}{3^2} = 3^{4\times 5} \times 3^{(-2)\times(-5)} \times \frac{1}{3^2}$
  $= 3^{20} \times 3^{10} \times 3^{-2} = 3^{20+10-2} = 3^{28}$
- $F = \frac{4^{-2} \times 8^3}{16^3} = \frac{(2^2)^{-2} \times (2^3)^3}{(2^4)^3} = \frac{2^{-4} \times 2^9}{2^{12}} = 2^{-4+9-12} = 2^{-7} = \frac{1}{2^7}$
- $G = \frac{9^3 \times 27^2 \times 75}{5^2 \times 3^4} = \frac{(3^2)^3 \times (3^3)^2 \times 3 \times 5^2}{5^2 \times 3^4} = 3^{6+6+1-4} \times 5^{2-2} = 3^9 \times 5^0 = 3^9$
- $H = \left(\frac{2}{3}\right)^{11} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{10} = \frac{2^{11}}{3^{11}} \times \frac{3^{10}}{2^{10}} = 2^{11-10} \times 3^{10-11} = 2^1 \times 3^{-1} = \frac{2}{3}$
- $I = (a^3)^2 \times a^{-4} = a^{6-4} = a^2$
- $J = a^2 b^{-3} (ab)^4 = a^2 b^{-3} a^4 b^4 = a^6 b^1 = a^6 b$

4 Exercice 4

- $A = \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

- $B = \sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = \sqrt{16} \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$
- $C = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$
- $D = 3\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = (3+8-5)\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$
- $E = 5\sqrt{27} - 2\sqrt{48} = 5\sqrt{9 \times 3} - 2\sqrt{16 \times 3} = 5\sqrt{9} \times \sqrt{3} - 2\sqrt{16} \times \sqrt{3} = 15\sqrt{3} - 8\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$
- $F = \dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt{242}} \times \sqrt{\dfrac{98}{25}} = \dfrac{9}{\sqrt{121 \times 2}} \times \dfrac{\sqrt{49 \times 2}}{5} = \dfrac{9}{11\cancel{\sqrt{2}}} \times \dfrac{7\cancel{\sqrt{2}}}{5} = \dfrac{9 \times 7}{11 \times 5} = \dfrac{63}{55}$
- $G = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$
- $H = 2 - \sqrt{3})^2 = 4 - 4\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 7 - 4\sqrt{3}$
- $I = 3(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) = 3\big(1^2 - (\sqrt{2})^2\big) = 3(1-2) = 3 \times (-1) = -3$

5 Exercice 5

Soient $x = a + b\sqrt{2}$ et $y = c + d\sqrt{2}$ avec a, b, c, d dans $\mathbb{Q}$.

- Tout d'abord,
$$x - y = a + b\sqrt{2} - c - d\sqrt{2} = (a-c) + (b-d)\sqrt{2}.$$
Ainsi, $x - y$ est de la forme $A + B\sqrt{2}$ avec $A = a - c$ et $B = b - d$. On a bien $(A, B) \in \mathbb{Q}^2$, donc $x - y \in \mathbb{K}$.
- Ensuite,
$$xy = (a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = ac + ad\sqrt{2} + bc\sqrt{2} + 2bd = ac + 2bd + \sqrt{2}(ad + bc)$$
ce qui est aussi de la forme $A + B\sqrt{2}$ avec $A = ac + 2bd$ et $B = ad + bc$. On a bien $(A, B) \in \mathbb{Q}^2$, donc $xy \in \mathbb{K}$.
- Enfin, si $x \neq 0$ alors $(a, b) \neq (0, 0)$ et $a - b\sqrt{2} \neq 0$ (en effet, $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel...), donc on peut écrire :
$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2})} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} \\ &= \frac{a}{a^2 - 2b^2} - \frac{b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2} \end{aligned}$$
Cette expression est encore de la forme $A + B\sqrt{2}$ avec $A = \dfrac{a}{a^2 - 2b^2}$ et $B = \dfrac{b}{a^2 - 2b^2}$. On a bien $(A, B) \in \mathbb{Q}^2$, donc $\dfrac{1}{x} \in \mathbb{K}$.

6 Exercice 6

- $A(x) = 4(2x+5) + (x-3)(5x-7) = 8x + 20 + 5x^2 - 7x - 15x + 21 = 5x^2 - 14x + 41$
- $B(x) = (2x-3)^2 - (4x+1)(x-3) = (4x^2 - 12x + 9) - (4x^2 - 12x + x - 3) = -x + 12$
- $C(x) = (x-3)(x+3) - (-3x+2)(x-5) = x^2 - 9 - (-3x^2 + 15x + 2x - 10) = 4x^2 - 17x + 1$
- $\begin{aligned}[t] D(x) &= (-2x-4)^2(-x+1) = (4x^2 + 16x + 16)(-x+1) \\ &= -4x^3 - 16x^2 - 16x + 4x^2 + 16x + 16 = -4x^3 - 12x^2 + 16 \end{aligned}$

7 Exercice 7

- $\begin{aligned}[t] A(x) &= (2x-5)(7+3x) - (2x-5)(3x-2) = (2x-5)\big[(7+3x) - (3x-2)\big] \\ &= (2x-5)\big(7 + 3x - 3x + 2\big) = 9(2x-5) \end{aligned}$
- $\begin{aligned}[t] B(x) &= (x-3)(3x+5) + (9x^2 + 30x + 25) = (x-3)(3x+5) + \big((3x)^2 + 2 \times 3x \times 5 + 5^2\big) \\ &= (x-3)(3x+5) + (3x+5)^2 = (x-3)(3x+5) + (3x+5)(3x+5) \\ &= (3x+5)(x - 3 + 3x + 5) = (3x+5)(4x+2) \end{aligned}$
- $\begin{aligned}[t] C(x) &= 3(x+3)(2x+3) - (4x^2 - 9) = (x+3)(2x+3) - \big((2x)^2 - 3^2\big) \\ &= (x+3)(2x+3) - (2x-3)(2x+3) = (2x+3)\big(3(x+3) - (2x+3)\big) \\ &= (2x+3)(3x + 9 - 2x - 3) = (2x+3)(x+6) \end{aligned}$
- $\begin{aligned}[t] D(x) &= (2x-1)^2 - (3-5x)^2 = \big(2x - 1 - (3-5x)\big)(2x - 1 + 3 - 5x) \\ &= (2x - 1 - 3 + 5x)(2x - 1 + 3 - 5x) = (7x-4)(-3x+2) \end{aligned}$

8 Exercice 8

1. L'équation est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$5x - 9 = 3x + 4 \iff 5x - 3x = 4 + 9 \iff 2x = 13 \iff x = \frac{13}{2}$$

Donc, $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{13}{2}\right\}}$.

2. L'équation est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$x - \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \iff x = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \iff x = \frac{9}{12} + \frac{8}{12} = \frac{17}{12}$$

Donc, $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{17}{12}\right\}}$.

3. L'équation est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\frac{4}{5}x + 4 = -\frac{2}{3} \iff \frac{4}{5}x = -\frac{2}{3} - 4 \iff \frac{4}{5}x = -\frac{2}{3} - \frac{12}{3} = -\frac{14}{3} \iff x = -\frac{14}{3} \times \frac{5}{4} = -\frac{70}{12} = -\frac{35}{6}$$

Donc, $\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\frac{35}{6}\right\}}$.

4. L'équation est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} &4(x-2) - 3\big(6 - 2(3 - 4x)\big) + 3(7 - 2x) = 0 \iff 4x - 8 - 3(6 - 6 + 8x) + 21 - 6x = 0 \\ &\iff 4x - 8 - 24x + 21 - 6x = 0 \iff -26x + 13 = 0 \\ &\iff -26x = -13 \iff x = \frac{-13}{-26} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc, $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}\right\}}$.

9 Exercice 9

1. L'équation $x^2 + 5x + 6 = 0$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculons le discriminant : $\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$. Ainsi, l'équation admet deux solutions qui sont données par :

$$x_1 = \frac{-5 - 1}{2} = -3 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-5 + 1}{2} = -2$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{S} = \{-2; -3\}}$.

2. L'équation $x^2 + x + 1 = 0$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculons le discriminant : $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$. Ainsi, l'équation n'admet aucune solution : $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$.

3. L'équation $-2x^2 + 3x + 1 = 0$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculons le discriminant : $\Delta = 9 + 8 = 17 > 0$. Ainsi, l'équation admet deux solutions qui sont données par :

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{-4} = \frac{3 + \sqrt{17}}{4} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{3 - \sqrt{17}}{4}$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{3 + \sqrt{17}}{4}; \frac{3 - \sqrt{17}}{4}\right\}}$.

10 Exercice 11

Pour toutes les équations ci-dessous, l'idée est de poser $X = x^2$. Cela permet de se ramener à des équations de la forme $aX^2 + bX + c = 0$ que l'on sait résoudre. Il suffira alors de résoudre $x^2 = X$ pour les solutions x de l'équation initiale.

1. L'équation est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = x^2$. On a : $x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \iff X^2 - 13X + 36 = 0$. On a alors une équation de la forme $aX^2 + bX + c = 0$, avec $a = 1$, $b = -13$ et $c = 36$. On calcule le discriminant
$$\Delta = (-13)^2 - 4 \times 1 \times 36 = 169 - 144 = 25 > 0.$$
Il y a donc deux solutions (pour X)
$$X_1 = \frac{-(-13) - \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{13-5}{2} = 4 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-(-13) + \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{13+5}{2} = 9.$$
Il reste alors à savoir pour quelles valeurs de x est-ce que $x^2 = X_1 = 4$ et $x^2 = X_2 = 9$.
Or $x^2 = X_1 = 4 \iff x = 2$ ou $x = -2$ et $x^2 = X_2 = 9 \iff x = 3$ ou $x = -3$. Ainsi $\boxed{\mathcal{S} = \{-3, -2, 2, 3\}}$.
2. L'équation est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = x^2$. On a :$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \iff X^2 - 5X + 4 = 0$. On a alors une équation de la forme $aX^2 + bX + c = 0$, avec $a = 1$, $b = -5$ et $c = 4$. On calcule le discriminant
$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 25 - 16 = 9 > 0.$$
Il y a donc deux solutions (pour X)
$$X_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{5-3}{2} = 1 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-(-5) + \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{5+3}{2} = 4.$$
Il reste alors à savoir pour quelles valeurs de x est-ce que $x^2 = X_1 = 1$ et $x^2 = X_2 = 4$.
Or $x^2 = X_1 = 1 \iff x = 1$ ou $x = -1$ et $x^2 = X_2 = 4 \iff x = 2$ ou $x = -2$. Ainsi $\boxed{\mathcal{S} = \{-2, -1, 1, 2\}}$.
3. L'équation est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = x^2$. On a :$9x^4 - 85x^2 + 196 = 0 \iff 9X^2 - 85X + 196 = 0$. On a alors une équation de la forme $aX^2 + bX + c = 0$, avec $a = 9$, $b = -85$ et $c = 196$. On calcule le discriminant
$$\Delta = (-85)^2 - 4 \times 9 \times 196 = 85^2 - (2 \times 3 \times 14)^2 = 85^2 - 84^2 = (85-84) \times (85+84) = 169 > 0.$$
Il y a donc deux solutions (pour X)
$$X_1 = \frac{-(-85) - \sqrt{169}}{2 \times 9} = \frac{85-13}{18} = 4 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-(-85) + \sqrt{169}}{2 \times 9} = \frac{85+13}{18} = \frac{49}{9}.$$
Il reste alors à savoir pour quelles valeurs de x est-ce que $x^2 = X_1 = 4$ et $x^2 = X_2 = \frac{49}{9}$.
Or $x^2 = X = 4 \iff x = 2$ ou $x = -2$ et $x^2 = X_2 = \frac{49}{9} \iff x = \frac{7}{3}$ ou $x = -\frac{7}{3}$. Ainsi $\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\frac{7}{3}, -2, 2, \frac{7}{3}\right\}}$.
4. L'équation est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Posons $X = x^2$. On a : $x^2 + \frac{1}{x^2} - 6 = 0 \iff x^4 + x^2 - 6 = 0 \iff X^2 + X - 6 = 0$. On a une équation de la forme $aX^2 + bX + c = 0$, avec $a = 1$, $b = 1$ et $c = -6$. On calcule le discriminant
$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = 25 > 0.$$
Il y a donc deux solutions (pour X)
$$X_1 = \frac{-1 - \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{-1-5}{2} = -3 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-1 + \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{-1+5}{2} = 2.$$
Il reste alors à savoir pour quelles valeurs de x est-ce que $x^2 = X_1 = -3$ et $x^2 = X_2 = 2$.
Or $x^2 = X_1 = -3$ n'a pas de solutions puisqu'un carré ne peut pas être négatif.
Et $x^2 = X_2 = 2 \iff x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$. Ainsi $\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}}$.

11 Exercice 12

1. Cette équation est définie pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}$. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}$, on a les équivalences suivantes :
$$\frac{x-4}{x+4} = 0 \iff x - 4 = 0 \iff x = 4.$$
Or $4 \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}$ donc $\mathcal{S} = \{-4\}$.

2. Cette équation est définie pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, on a les équivalences suivantes :
$$\frac{x-2}{x-3} = x-1 \iff x-2 = (x-1)(x-3) \iff x-2 = x^2-4x+3 \iff x^2-5x+5=0.$$
Calculons le discriminant de ce polynôme de degré 2, on a : $\Delta = 5$ et donc $x_1 = \dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$. Ces deux racines sont différentes de 3 et donc $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}\right\}$.
3. Cette équation est définie pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on a les équivalences suivantes :
$$\frac{x^2-x}{x-1} = 2x+3 \iff x(x-1) = (2x+3)(x-1) \iff (x-1)(x-2x-3) = 0 \iff (x-1)(-x-3)=0 \iff x=1 \quad \text{ou} \quad x=-3$$
or $1 \notin \mathbb{R} \setminus \{1\}$ donc $\mathcal{S} = \{-3\}$.
4. Cette équation est définie pour $x \in \mathbb{R}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a les équivalences suivantes :
$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} \iff x^2 = x \iff x(x-1)=0 \iff x=0 \quad \text{ou} \quad x=1$$
or $0 \notin \mathbb{R}^*$ donc $\mathcal{S} = \{1\}$.
5. Cette équation est définie pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,-2\}$. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,-2\}$, on a les équivalences suivantes (en mettant tous les termes au même dénominateur) :
$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x+1} + 4 = \frac{5x}{x+2} &\iff \frac{(x+2)^2 + 4(x+1)(x+2) - 5x(x+1)}{(x+1)(x+2)} = 0 \\ &\iff \frac{11x+12}{(x+1)(x+2)} = 0 \\ &\iff 11x+12 = 0 \iff x = \frac{-12}{11}. \end{aligned}$$
Or $\dfrac{-12}{11} \in \mathbb{R} \setminus \{-1,-2\}$ donc $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{-12}{11}\right\}$.

12 Exercice 13

Commençons par résoudre $x^2+2x+1=0$ pour déterminer le domaine de définition de l'équation. On a :
$$x^2+2x+1 = 0 \iff (x+1)^2 = 0 \iff x = -1.$$
Ainsi l'équation est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, on a alors les équivalences suivantes :
$$\frac{7x-5}{x^2+2x+1} = 1 \iff \frac{7x-5}{x^2+2x+1} - 1 = 0 \iff \frac{-x^2+5x-6}{x^2+2x+1} = 0 \iff -x^2+5x-6 = 0$$
Il reste à résoudre cette équation de degré 2, on calcule le discriminant puis les racines et on obtient $x_1 = 2$ et $x_2 = 3$. Ces deux racines sont bien différentes de -1 donc $\mathcal{S} = \{2,3\}$.

13 Exercice 16

1. L'inéquation $x^2-2x+1>0$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculons le discriminant : $\Delta = 4-4 = 0$. Ainsi, il y a une unique racine donnée par : $x_0 = 1$. Et le tableau de signes est donc donné par :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
x^2-2x+1		$+$	0	$+$	

Ainsi on déduit que $x^2-2x+1>0 \iff x \in]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[= \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Donc
$$\mathcal{S} = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

2. L'inéquation $-3x^2+5x-2 \leqslant 0$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculons le discriminant : $\Delta = 25-24 = 1$. Ainsi, il y a deux racines qui sont : $x_1 = \dfrac{2}{3}$ et $x_2 = 1$. On en déduit le tableau de signe de $3x^2-5x+2$.

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$3x^2-5x+2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi $-3x^2+5x-2 \leqslant 0 \iff 3x^2-5x+2 \geqslant 0 \iff x \in \left]-\infty, \dfrac{2}{3}\right] \cup [1,+\infty[$. Donc

$$\mathcal{S} = \left]-\infty, \frac{2}{3}\right] \cup [1,+\infty[.$$

3. L'inéquation est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. On commence par établir le tableau de signe de x^2-4x-4.
Pour cela, calculons le discriminant $\Delta = (-4)^2 - 4\times 1 \times (-4) = 16+16 = 32 > 0$. Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{4-\sqrt{32}}{2} = \frac{4-\sqrt{16}\times\sqrt{2}}{2} = \frac{4-4\sqrt{2}}{2} = 2-2\sqrt{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{4+\sqrt{32}}{2} = \frac{4+4\sqrt{2}}{2} = 2+2\sqrt{2}.$$

On en déduit le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$		$2-2\sqrt{2}$		$2+2\sqrt{2}$		$+\infty$
x^2-4x-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi

$$\mathcal{S} = \left]-\infty, 2-2\sqrt{2}\right] \cup \left[2+2\sqrt{2}, +\infty\right[.$$

4. L'inéquation est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$-2x^2+5x \leqslant 2 \iff -2x^2+5x-2 \leqslant 0$$

Calculons le discriminant de cette inéquation $\Delta = 5^2 - 4\times(-2)\times(-2) = 25-16 = 9 > 0$. Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{-5-\sqrt{9}}{-4} = \frac{-5-3}{-4} = \frac{-8}{-4} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-5+\sqrt{9}}{-4} = \frac{-5+3}{-4} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}.$$

On en déduit le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
x^2-4x-4		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi

$$\mathcal{S} = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup [2,+\infty[.$$

14 Exercice 17

1. Cette inéquation est définie pour $x \in \mathbb{R}\setminus\{-4\}$. Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{-4\}$, dressons le tableau de ce quotient :

x	$-\infty$		-4		4		$+\infty$
$x-4$			$-$		0	$-$	
$x+4$		$-$	0		$+$		
$\dfrac{x-4}{x+4}$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

On en déduit alors l'ensemble des solutions : $\mathcal{S} =]-\infty, -4[\cup]4, +\infty[$.

2. Cette inéquation est définie pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}$. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}$. En reprenant les calculs de la question 5. de l'exercice 12, on a l'équivalence suivante :

$$\frac{x+2}{x+1} + 4 = \frac{5x}{x+2} \iff \frac{11x+12}{(x+1)(x+2)} = 0$$

Dressons alors le tableau de signes de ce quotient :

x	$-\infty$		-2		$-\dfrac{12}{11}$		-1		$+\infty$
$11x+12$			$-$		0		$+$		
$x+1$				$-$			0	$+$	
$x+2$		$-$	0			$+$			
$\dfrac{11x+12}{(x+1)(x+2)}$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

On en déduit alors l'ensemble des solutions : $\mathcal{S} =]-\infty, -2[\cup \left[-\dfrac{12}{11}, -1\right[$.

15 Exercice 19

1. La méthode classique pour montrer ce genre d'inégalités est de remarquer que le résultat équivaut à l'inégalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^x - x - 1 \geqslant 0.$$

Posons alors pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction f définie par $f(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \mathrm{e}^x - 1.$$

Ainsi pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^x \geqslant 1 \iff x \geqslant 0.$$

La fonction f est donc décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$. Elle admet donc un minimum en 0. Or $f(0) = 1 - 1 = 0$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$ soit pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{e}^x \geqslant x + 1.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, \sqrt{n}]$, appliquons l'inégalité de la question 1. à $x = -\dfrac{-t^2}{n}$, on a alors :

$$\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{n}} \geqslant -\frac{t^2}{n} + 1$$

soit
$$1 - \frac{t^2}{n} \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{n}}.$$
On souhaite ensuite appliquer la fonction $x \mapsto x^n$ qui est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Vérifions donc que chaque terme de mon inégalité est positif.
Il est immédiat que $\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{n}} > 0$. De plus pour $t \in [0, \sqrt{n}]$, on a, par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$:
$$0 \leqslant t^2 \leqslant n \iff 0 \leqslant \frac{t^2}{n} \leqslant 1 \iff 0 \geqslant -\frac{t^2}{n} \geqslant -1 \iff 0 \leqslant 1 - \frac{t^2}{n} \leqslant 1.$$
Ainsi on obtient :
$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t^2}$$
Il reste à multiplier l'inégalité par $\mathrm{e}^{t^2} > 0$ pour obtenir le résultat voulu, à savoir :
$$\mathrm{e}^{t^2}\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leqslant 1.$$

16 Exercice 20

1. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $(a-b)^2 \geqslant 0$, donc
$$a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0.$$
$$\frac{a^2+b^2}{2} \geqslant ab.$$
2. $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{2}(a^2+b^2) + \frac{1}{2}(a^2+c^2) + \frac{1}{2}(c^2+b^2) \geqslant ac + ab + bc.$

17 Exercice 22

1. L'affirmation est vraie, sa négation est :
$$\exists x \in \mathbb{R}, x \neq \ln(\mathrm{e}^x)$$
2. L'affirmation est fausse (on peut le voir en raisonnant par l'absurde par exemple), sa négation est :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x} \neq -x$$
3. L'affirmation est fausse. Prendre par exemple la fonction carré avec $x = 1$ et $x' = -1$. Sa négation est :
$$\exists f \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R}, x \neq x' \quad \text{et} \quad f(x) = f(x')$$

18 Exercice 24

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant 4.$
2. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M.$
3. $\exists m \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, m \leqslant u_n \leqslant M.$
4. On écrit la négation de la question 2. :
$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, u_n > M.$
5. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, u_n = u_p.$
6. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geqslant u_n.$
7. $\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, ((n \geqslant N_0 \text{ et } p \geqslant N_0) \Rightarrow u_n = u_p).$

19 Exercice 27

Montrons le résultat par l'absurde. Supposons que pour tout x différent de -3, $\frac{x+1}{x+3} = 1$. On a alors :
$$x + 1 = x + 3$$
soit $1 = 3$ qui est évidemment absurde. Ainsi pour tout x différent de -3, $\frac{x+1}{x+3} \neq 1$.

20 Exercice 33

Les appariements corrects sont

1. c
2. d
3. g
4. f
5. j
6. i
7. k
8. l
9. h
10. a
11. e
12. b

