Séries numériques

Exercice 1 (♣)

Justifier la convergence des séries suivantes puis calculer les sommes correspondantes :

1. $A = \sum_{n \geq 0} \frac{2}{3^{n+1}}$
2. $B = \sum_{n \geq 0} \frac{n}{5^{n-1}}$
3. $C = \sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{5^n}$
4. $D = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n n}{3^n}$
5. $E = \sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{(n+1)!}$
6. $F = \sum_{n \geq 0} \frac{n 2^n}{n!}$
7. $G = \sum_{n \geq 0} \frac{4n^2+5n}{5^n}$
8. $H = \sum_{n \geq 0} \frac{3n^2-n+4^n}{n!}$

Exercice 2 (♥)

Etudier la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2+n-5}{n^3+11n-9}$
2. $\sum_{n \geq 0} n^3 e^{-n}$
3. $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n^2+1}$
4. $\sum_{n \geq 1} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$
5. $\sum_{n \geq 1} \frac{n^2+\ln(n)}{n^5+11n}$
6. $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(2n)}{n\sqrt{n+8}}$
7. $\sum_{n \geq 0} 4n \sin\left(2^{-n}\right)$
8. $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n^2+n+1}$

Exercice 3 (♥)

Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans chacun des cas suivants :

1. $u_n = \frac{1}{n^2-1} - \frac{1}{n^2+1}$
2. $u_n = \frac{1}{n \cos^2(n)}$
3. $u_n = \frac{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}}{\mathrm{e}^{2n} - \mathrm{e}^{-2n}}$
4. $u_n = \frac{1}{\ln(n)^{\ln(n)}}$

Exercice 4 (♠)

Déterminer en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature des séries de termes généraux :

1. $u_n = \mathrm{e}^{-n^\alpha}$
2. $u_n = \frac{\ln(n)}{n^\alpha}$
3. $u_n = \exp\left(-(\ln(n))^\alpha\right)$

Exercice 5 (♥)

En calculant les sommes partielles, déterminer si les séries suivantes sont convergentes :

1. $\sum_{n \geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$
2. $\sum_{n \geq 2} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)}$
3. $\sum_{n \geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$
4. $\sum_{n \geq 0} \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$
   Indication : Si $a \geq 0$ et $b \geq 0$,
   $$\arctan(a) - \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a-b}{1+ab}\right).$$

Exercice 6 (♦)

On considère la série numérique :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)},$$

et pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n sa n-ième somme partielle.

1. Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que
   $$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}.$$
2. Calculer S_n.
3. En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ est convergente et calculer sa somme.

Exercice 7 (♦)

On admet que pour tout entier m dans $\mathbb{N}$ et pour tout x dans $[0;1[$, la série $\sum_{n \geq m} \binom{n}{m} x^n$ est convergente et on note :

$$s_m(x) = \sum_{k=m}^{+\infty} \binom{k}{m} x^k$$

1. Vérifier que $s_0(x) = \frac{1}{1-x}$ et que $s_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$.
2. En utilisant la relation de Pascal, montrer que :
   $$\forall m \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0;1[\quad s_{m+1}(x) = x s_m(x) + x s_{m+1}(x)$$

3. Montrer par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$ que :

$$\forall m \in \mathbb{N} \qquad \forall x \in [0;1[\qquad s_m(x) = \frac{x^m}{(1-x)^{m+1}}.$$

Exercice 8 (♠)

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs décroissante de limite nulle. On pose, pour tout $n \geq 0$,

$$a_n = (-1)^n u_n \text{ et } S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

1. Montrer que les deux suites $(S_{2n})_{n\geq 0}$ et $(S_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont adjacentes.
2. En déduire que la série de terme général a_n est convergente.
3. *Application :* Montrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n}$ est convergente.

Exercice 9 (♥)

Le but de l'exercice est de déterminer un équivalent de

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

c'est-à-dire un équivalent de la somme partielle de la série harmonique.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $S_{2n} - S_n$.
2. En minorant cette expression, montrer que la série diverge.
3. Soit $k \geq 2$. Montrer que

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\mathrm{d}t.$$

4. Donner un équivalent de S_n.

Exercice 10 (♠)

1. **Critère de Riemann**
   (a) Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes positifs telle qu'il existe $\alpha > 1$ tel que la suite $(n^\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit majorée. Montrer que cette série est alors convergente.
   (b) Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes positifs telle que la suite $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit minorée à partir d'un certain rang. Montrer que cette série est alors divergente.
2. Etudier la convergence des séries suivantes :
   (a) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}$
   (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$

Exercice 11 (♠♠)

Critère de Cauchy Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes positifs telle que : $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$.

1. Démontrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad (\ell-\varepsilon)^n \leq u_n \leq (\ell+\varepsilon)^n.$$

2. On suppose que $\ell < 1$. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.
3. On suppose que $\ell > 1$. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est divergente.
4. En déduire la nature de la série dans le cas où

$$u_n = \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n.$$

♣ Du trèfle à brouter...
♥ À connaître par coeur.
♠ Qui s'y frotte s'y pique !
♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau !