Eléments de correction du TD 18

Table des matières

1 Exercice 5

Soit un entier $n \geqslant 3$, on a :

$$u_n = \exp\left(3n\ln\left(1-\frac{2}{n}\right)\right).$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$, on :

$$\ln\left(1-\frac{2}{n}\right) \sim -\frac{2}{n}$$

et donc :

$$3n\ln\left(1-\frac{2}{n}\right) \sim -\frac{6n}{n} \sim -6$$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n\ln\left(1-\frac{2}{n}\right) = -6$. On en déduit par composée de limites que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \exp(-6).$$

2 Exercice 10

1. Posons pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x + \ln(x)$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0 \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}_+^*.$$

Ainsi la fonction f est strictement croissante et continue (car dérivable) sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

La fonction f réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$. Ainsi tout élément $n \in \mathbb{N}$ admet un unique antécédent par f. Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation E_n possède une unique solution $x_n \in \mathbb{R}_+^*$.

2. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = n$. Or $n \leqslant n+1$ donc

$$f(x_n) \leqslant f(x_{n+1})$$

Comme la fonction f est strictement croissante, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leqslant x_{n+1}$. Ainsi la suite (x_n) est croissante.
Comme la suite (x_n) est croissante, soit elle diverge vers $+\infty$ soit elle converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.
Supposons qu'elle converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$. On peut affirmer que $\ell > 0$ car $x_1 = 1$ et (x_n) est croissante. Alors comme f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\ell) \in \mathbb{R}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc $f(\ell) = +\infty$. Absurde.
On en conclut que la suite (x_n) diverge.

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ et par croissance comparée $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0$ donc par composée de limites $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(x_n)}{x_n} = 0$ et $\ln(x_n) = o(x_n)$, ainsi :

$$x_n + \ln(x_n) \sim x_n$$

Or $x_n + \ln(x_n) = n$, on en déduit que $\boxed{x_n \sim n}$.

3 Exercice 12

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$, posons $f(x) = \sqrt{x}$. La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [n, n+1]$ alors par décroissance de $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$:

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Ainsi d'après l'inégalité des accroissements finis sur $[n, n+1]$:

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}}(n+1-n) \leqslant f(n+1) - f(n) \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}(n+1-n)$$

soit

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leqslant \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

i.e.

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

2. Sommons l'inégalité de droite précédente pour k variant de 1 à n, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) &= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k+1} - \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \\
&= \sum_{j=2}^{n+1} \sqrt{j} - \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \\
&= \sum_{j=2}^{n} \sqrt{j} + \sqrt{n+1} - \sum_{k=2}^{n} \sqrt{k} - 1 \\
&= \sqrt{n+1} - 1
\end{aligned}$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2(\sqrt{n+1} - 1) \leqslant S_n$.

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} - 1 = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty}$.

3. On a montré à la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2(\sqrt{n+1} - 1) \leqslant S_n$.
Procédons de même pour obtenir une majoration de S_n. Sommons l'inégalité de gauche de la question 1. pour k variant de 1 à n. On obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}).$$

Or on a montré précédemment que :

$$\sum_{k=1}^{n} 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = 2(\sqrt{n+1} - 1).$$

De plus,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{j}} = S_n - 1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Ainsi :

$$S_n \leqslant 2(\sqrt{n+1} - 1) + 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

On peut donc en déduire l'encadrement de S_n suivant :

$$2(\sqrt{n+1} - 1) \leqslant S_n \leqslant 2(\sqrt{n+1} - 1) + 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

4. Au regard de l'encadrement déterminé à la question précédente, montrons que $S_n \sim 2\sqrt{n+1}$. Pour cela montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{2\sqrt{n+1}} = 1$. En divisant l'encadrement précédent par $2\sqrt{n+1} > 0$, on a :

$$1 - \frac{2}{2\sqrt{n+1}} \leqslant \frac{S_n}{2\sqrt{n+1}} \leqslant 1 - \frac{2}{2\sqrt{n+1}} + \frac{1}{2\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{2\sqrt{n+1}} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)} = 0$ donc on a :

$$\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{2}{2\sqrt{n+1}} = 1$$

et

$$1 - \frac{2}{2\sqrt{n+1}} + \frac{1}{2\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}} = 1.$$

Ainsi d'après le théorème d'encadrement $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{S_n}{2\sqrt{n+1}} = 1$ donc $S_n \sim 2\sqrt{n+1}$.

De plus, $n+1 \sim n$ et $\sqrt{n+1} = (n+1)^{\frac{1}{2}} \sim (n)^{\frac{1}{2}}$ donc $\boxed{S_n \sim 2\sqrt{n}}$.