Etude asymptotique des suites

Exercice 1 (♣)

Donner un équivalent simple à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans les exemples suivants et en déduire la limite de la suite.

1. $u_n = \dfrac{n^2+4}{n^3+8n}$
2. $u_n = \dfrac{n^3-\sqrt{n^2+1}}{\ln(n)-2n^2}$
3. $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt[3]{n^2-n+1}}$
4. $u_n = \dfrac{\ln(n)+(-1)^n}{n^2+\sqrt{n}}$
5. $u_n = \sqrt{\ln(n+1)-\ln(n)}$
6. $u_n = \dfrac{\ln\left(n^2+1\right)}{n+1}$
7. $u_n = (n+3\ln(n))e^{-(n+1)}$
8. $u_n = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}$
9. $u_n = \dfrac{2n^3-\ln(n)+1}{n^2+1}$
10. $u_n = \dfrac{(2n+1)^2}{3n+4}$
11. $u_n = \dfrac{n!+e^n}{2^n+3^n}$
12. $u_n = \ln(n)+4$
13. $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$
14. . $u_n = \dfrac{1}{4\sqrt{n}} + 3^{-n+2}$
15. $u_n = \dfrac{4^{n+3}+2^n}{5^{n+2}+1}$

Exercice 2 (♣)

Dans chaque cas, donner une relation de comparaison entre les deux suites.

1. $u_n = n+4$ et $v_n = 2^n$
2. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \dfrac{1}{5^n}$
3. $u_n = (n+1)^2$ et $v_n = n^2+6\sin(n)$
4. $u_n = n^2+3^n$ et $v_n = n^4+2n$
5. $u_n = \dfrac{n+\ln(n)-2}{4n^2-1}$ et $v_n = \dfrac{1}{2}\dfrac{n^2-1}{n\,(2n^2+3n+1)}$
6. $u_n = 3^{2n}-4n^4$ et $v_n = 9^n+\ln(n)$

Exercice 3 (♣)

Soit $(P,Q)\in\mathbb{R}[x]^2$ tels que $\deg(P)<\deg(Q)$. Montrer que $P(n)=o(Q(n))$.

Exercice 4 (♣)

Montrer que si $P\in\mathbb{R}[x]$ est non nul alors $P(n)\sim an^p$ avec a égal au coefficient dominant de P et $p=\deg(P)$.

Exercice 5 (♥)

Calculer la limite de la suite définie pour les entiers $n\geq 3$ par

$$u_n = \left(1-\frac{2}{n}\right)^{3n}.$$

Exercice 6 (♠)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels telle que

$$u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}.$$

1. Montrer que (u_n) converge vers 0^+.
2. Donner un équivalent simple de (u_n).

Exercice 7 (♣)

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k! \sim n!$.

Exercice 8 (♣)

Déterminer un équivalent simple à la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ dans les exemples suivants :

1. $u_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n^2+n+1}\right)$
2. $u_n = \sin\left(e^{-n+2}+\dfrac{2}{n}\right)$
3. $u_n = \ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{2n}\right)\right)$
4. $u_n = \exp\left(\sin\left(2^{-n}\right)\right)-1$
5. $u_n = \sqrt{1+\dfrac{1}{3n+4n^2-1}}-1$

Exercice 9 (♣)

Montrer que $u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \sim \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

Exercice 10 (♥)

Soit n un entier naturel et E_n l'équation $x+\ln(x)=n$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que l'équation E_n possède une solution unique notée x_n.
2. Montrer que la suite (x_n) diverge vers $+\infty$.
3. Donner un équivalent simple de la suite (x_n).

Exercice 11 (♠)

Soient $n\in\mathbb{N}^*$. On considère l'équation

$$(E_n) : x^n + x - 1 = 0.$$

1. Montrer que l'équation possède une unique solution, notée x_n sur $[0,+\infty[$.
2. Montrer que $x_n \in]\,0,1[$.
3. Montrer que la suite (x_n) converge et donner sa limite.
4. En posant $y_n = 1 - x_n$, on peut montrer (par de gros calculs que je vous épargne ;)) qu'à partir d'un certain rang,
$$\frac{\ln(n)}{2n} \leq y_n \leq 2\frac{\ln(n)}{n}$$
Montrer alors que $\ln(y_n) \sim -\ln(n)$ et en déduire que $x_n = 1 - \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$.

Exercice 12 (♠)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$
2. Déterminer un encadrement de S_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Déterminer la limite de (S_n).
4. Donner un équivalent simple de (S_n).

♣ Du trèfle à brouter...
♥ À connaître par coeur.
♠ Qui s'y frotte s'y pique !
♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau !