Eléments de correction du TD 17

Table des matières

1 Exercice 1

Posons pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x)$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

On montre par récurrence (il faudrait l'écrire) que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(4k)}(x) = \cos(x)$. On déduit ensuite que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$f^{(4k+1)}(x) = -\sin(x), \quad f^{(4k+2)}(x) = -\cos(x) \quad \text{et} \quad f^{(4k+3)}(x) = \sin(x).$$

Posons pour $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \sin(x)$. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

On montre par récurrence (il faudrait l'écrire) que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g^{(4k)}(x) = \sin(x)$. On déduit ensuite que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$g^{(4k+1)}(x) = \cos(x), \quad g^{(4k+2)}(x) = -\sin(x) \quad \text{et} \quad g^{(4k+3)}(x) = -\cos(x).$$

2 Exercice 10

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et la fonction $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc par composée la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{t}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$.
La fonction $t \mapsto 0$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Il reste donc à étudier la dérivabilité de f en 0. On a :
$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)-f(0)}{t-0} = \lim_{t\to 0^+} \frac{0-0}{t} = 0$$
et
$$\lim_{t\to 0^-} \frac{f(t)-f(0)}{t-0} = \lim_{t\to 0^-} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-0}{t} = \lim_{t\to 0^-} \frac{1}{t}\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}$$
Or $\lim\limits_{t\to 0^-} \dfrac{1}{t} = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to -\infty} X\mathrm{e}^X = 0$ donc par composée de limites $\lim\limits_{t\to 0^-} \dfrac{f(t)-f(0)}{t-0} = 0$.
Ainsi la fonction f est $\boxed{\text{dérivable en 0 et } f'(0) = 0}$.
2. Comme on sait que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, on peut calculer $f'(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On a :
$$f'(t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{t^2}e^{1/t} & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$
Etudions la limite du taux d'accroissement de f' à droite et à gauche de 0. On a :
$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f'(t)-f'(0)}{t-0} = \lim_{t\to 0^+} \frac{0-0}{t} = 0$$
et
$$\lim_{t\to 0^-} \frac{f'(t)-f'(0)}{t-0} = \lim_{t\to 0^-} \frac{\frac{-1}{t^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-0}{t} = \lim_{t\to 0^-} \frac{-1}{t^3}\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}$$
On remarque que $\dfrac{-1}{t^3}\mathrm{e}^{\frac{1}{t}} = -\left(\dfrac{1}{t}\right)^3\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}$. Or $\lim\limits_{t\to 0^-} \dfrac{1}{t} = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to -\infty} -X^3\mathrm{e}^X = 0$ donc par composée de limites $\lim\limits_{t\to 0^-} \dfrac{f'(t)-f'(0)}{t-0} = 0$.
Ainsi la fonction f' est $\boxed{\text{dérivable en 0 et } f''(0) = 0}$.
3. Montrons le résultat par récurrence.
On pose pour $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: « il existe $P_n \in \mathbb{R}[x]$ tel que $\forall t < 0$, $f^{(n)}(t) = \dfrac{P_n(t)}{t^{2n}}\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}$ »
Initialisation $(n = 0)$ On a $\forall t < 0$, $f^{(0)}(t) = f(t) = \dfrac{1}{t^0}\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}$. Posons $P_0(t) = 1 \in \mathbb{R}[x]$, on a alors :
$$f^{(0)}(t) = \frac{P_0(t)}{t^{2\times 0}}\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}$$

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Soit $t < 0$, on a :

$$f^{(n+1)}(t) = (f^{(n)})'(t)$$

Par hypothèse de récurrence, $f^{(n)}(t) = \dfrac{P_n(t)}{t^{2n}}\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}$. Elle est donc de la forme $u \times v$ avec $u(t) = \dfrac{P_n(t)}{t^{2n}}$ et $v(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{t}}$. On a alors :

$$u'(t) = \frac{P_n'(t)t^{2n} - P_n(t)2nt^{2n-1}}{(t^{2n})^2} = t^{2n-1}\frac{tP_n'(t) - 2nP_n(t)}{t^{4n}} = \frac{tP_n'(t) - 2nP_n(t)}{t^{2n+1}}$$

et

$$v'(t) = -\frac{1}{t^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}.$$

Ainsi

$$f^{(n+1)}(t) = \frac{tP_n'(t) - 2nP_n(t)}{t^{2n+1}}\mathrm{e}^{\frac{1}{t}} + \frac{P_n(t)}{t^{2n}} \times \left(\frac{-1}{t^2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}$$

soit

$$f^{(n+1)}(t) = \frac{t^2P_n'(t) - (2nt+1)P_n(t)}{t^{2(n+1)}}\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}$$

Posons $P_{n+1}(t) = t^2P_n'(t) - (2nt+1)P_n(t)$. Comme $P_n \in \mathbb{R}[x]$ alors $P_n' \in \mathbb{R}[x]$. De plus t^2 et $-(2nt+1)$ sont des polynômes également donc $P_{n+1} \in \mathbb{R}[x]$. On a donc bien l'existence d'un polynôme P_{n+1} tel que :

$$f^{(n+1)}(t) = \frac{P_{n+1}(t)}{t^{2(n+1)}}\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\forall t < 0$, $f^{(n)}(t) = \dfrac{P_n(t)}{t^{2n}}\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}$.

4. On remarque que $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et que $\exp$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ ainsi par composée $t \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{t}}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_-^*$. De plus $t \mapsto 0$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. Pour obtenir le résultat demandé, il faut donc montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ est dérivable en 0 et que sa dérivée est continue en 0.

Montrons cela par récurrence, on pose pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $f^{(n)}$ est dérivable en 0, $f^{(n+1)}(0) = 0$ et $f^{(n+1)}$ est continue en 0 ».

Initialisation $(n = 0)$ $f^{(0)} = f$ est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$ d'après la question 1. De plus f' est bien continue en 0 car elle est en particulier dérivable en 0, d'après la question 2.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence $f^{(n)}$ est dérivable en 0 et donc sur $\mathbb{R}$ (car $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^*)$), on a :

$$f^{(n+1)}(t) = \begin{cases} \dfrac{P_{n+1}(t)}{t^{2(n+1)}}e^{1/t} & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Montrons donc que $f^{(n+1)}$ est dérivable en 0. On a :

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(0)}{t-0} = \lim_{t\to 0^+} \frac{0-0}{t} = 0$$

et

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{f^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(0)}{t-0} = \lim_{t\to 0^-} \frac{\frac{P_{n+1}(t)}{t^{2(n+1)}}e^{1/t} - 0}{t} = \lim_{t\to 0^-} \frac{\frac{P_{n+1}(t)}{t^{2(n+1)}}e^{1/t} - 0}{t} = \lim_{t\to 0^-} \frac{P_{n+1}(t)}{t^{2n+3}}e^{1/t}$$

D'une part $\lim\limits_{t\to 0^-} P_{n+1}(t) = a_0$ où a_0 est le coefficient constant de P_{n+1}, d'autre part :

$$\frac{\mathrm{e}^{1/t}}{t^{2n+3}} = \left(\frac{1}{t}\right)^{2n+3}\mathrm{e}^{1/t}$$

Or $\lim\limits_{t\to 0^-} \dfrac{1}{t} = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to -\infty} X^{2n+3}\mathrm{e}^X = 0$ donc par composée de limites $\lim\limits_{t\to 0^-} \dfrac{\mathrm{e}^{1/t}}{t^{2n+3}} = 0$. Pour finir, par produit, $\lim\limits_{t\to 0^-} \dfrac{f^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(0)}{t-0} = 0$.

Ainsi $f^{(n+1)}$ est dérivable en 0 et $f^{(n+2)}(0) = 0$. Il ne reste plus qu'à montrer que $f^{(n+2)}$ est continue en 0. D'après ce qu'on vient de calculer et d'après la question 3, il existe $P_{n+2} \in \mathbb{R}[x]$ tel que :

$$f^{(n+2)}(t) = \begin{cases} \dfrac{P_{n+2}(t)}{t^{2(n+2)}} e^{1/t} & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

D'une part, on a clairement $\lim\limits_{t \to 0^+} f^{(n+2)}(t) = 0 = f^{(n+2)}(0)$. D'autre part, montrons que $\lim\limits_{t \to 0^-} f^{(n+2)}(t) = 0 = f^{(n+2)}(0)$. On a : d'une part $\lim\limits_{t \to 0^-} P_{n+2}(t) = b_0$ où b_0 est le coefficient constant de P_{n+2}, d'autre part :

$$\frac{\mathrm{e}^{1/t}}{t^{2n+4}} = \left(\frac{1}{t}\right)^{2n+4} \mathrm{e}^{1/t}$$

Or $\lim\limits_{t \to 0^-} \dfrac{1}{t} = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} X^{2n+4}\mathrm{e}^X = 0$ donc par composée de limites $\lim\limits_{t \to 0^-} \dfrac{\mathrm{e}^{1/t}}{t^{2n+4}} = 0$. Pour finir, par produit, $\lim\limits_{t \to 0^-} f^{(n+2)}(t) = 0 = f^{(n+2)}(0)$.
Ainsi $f^{(n+2)}$ est bien continue en 0 et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ est dérivable en 0, $f^{(n+1)}(0) = 0$ et $f^{(n+1)}$ est continue en 0.

En résumé, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^*)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ est dérivable en 0 et sa dérivée est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\boxed{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})}$.

3 Exercice 14

1. On cherche à appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange. On définit pour $t \in \mathbb{R}_+$, $f(t) = \mathrm{e}^{-t}$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$. On a pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$f^{(2)}(t) = \mathrm{e}^{-t}$$

Ainsi pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$|f^{(2)}(t)| = |\mathrm{e}^{-t}| \leqslant 1$$

car $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et vaut 1 en 0. Ainsi d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, appliquée à l'ordre 1 , on a, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$:

$$|f(b) - \sum_{k=0}^{1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)| \leqslant \frac{|b-a|^2}{2!} \times 1$$

soit

$$|\mathrm{e}^{-b} - \mathrm{e}^{-a} + (b-a)\mathrm{e}^{-a}| \leqslant \frac{|a-b|^2}{2}.$$

2. Commençons par montrer l'inégalité $x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3(1+x)^3} \leqslant \ln(1+x)$.
Posons pour $t \in \mathbb{R}_+$, $f(t) = \ln(1+t)$.
La fonction $t \mapsto 1+t$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $\ln$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par composée f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.
Ecrivons alors la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégrale à l'ordre 2 pour f, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!} f^{(3)}(t)\mathrm{d}t.$$

On a $f'(t) = \dfrac{1}{1+t}$, $f''(t) = \dfrac{-1}{(1+t)^2}$ et $f^{(3)}(t) = \dfrac{2}{(1+t)^3}$. Ainsi, on obtient :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} \times \frac{2}{(1+t)^3}\mathrm{d}t$$

Soit $t \in [0, x]$ alors comme $t \mapsto t^3$ est croissante sur $\mathbb{R}$, on a :

$$0 \leqslant (1+t)^3 \leqslant (1+x)^3$$

Comme la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\frac{1}{(1+t)^3} \geqslant \frac{1}{(1+x)^3}$$

Or $(x-t)^2 \geqslant 0$ donc :

$$\frac{(x-t)^2}{(1+t)^3} \geqslant \frac{(x-t)^2}{(1+x)^3}$$

Par croissance de l'intégrale sur $[0,x]$ avec $0 \leqslant x$ car $x \in \mathbb{R}_+$, on obtient :

$$\int_0^x \frac{(x-t)^2}{(1+t)^3}\mathrm{d}t \geqslant \int_0^x \frac{(x-t)^2}{(1+x)^3}\mathrm{d}t$$

Or :

$$\int_0^x \frac{(x-t)^2}{(1+x)^3}\mathrm{d}t = \frac{1}{(1+x)^3}\left[-\frac{1}{3}(x-t)^3\right]_0^x = \frac{x^3}{3(1+x)^3}.$$

Ainsi on obtient l'inégalité voulue pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\ln(1+x) \geqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{(1+x)^3}$$

Montrons maintenant l'inégalité : $\ln(1+x) \leqslant x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$.

Posons pour $t \in \mathbb{R}_+$, $f(t) = \ln(1+t)$. Comme justifié précédemment, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$. Ecrivons alors la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégrale à l'ordre 3 pour f, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + f^{(3)}(0)\frac{x^3}{3!} + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!} f^{(4)}(t)\mathrm{d}t.$$

On a $f'(t) = \dfrac{1}{1+t}$, $f''(t) = \dfrac{-1}{(1+t)^2}$, $f^{(3)}(t) = \dfrac{2}{(1+t)^3}$ et $f^{(4)}(t) = \dfrac{-6}{(1+t)^4}$. Ainsi, on obtient :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{6} \times \frac{-6}{(1+t)^4}\mathrm{d}t$$

i.e.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \int_0^x \frac{(x-t)^3}{(1+t)^4}\mathrm{d}t$$

Pour tout $t \in [0,x]$, $\dfrac{(x-t)^3}{(1+t)^4} \geqslant 0$ et par croissance de l'intégrale sur $[0,x]$ avec $0 \leqslant x$ car $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\int_0^x \frac{(x-t)^3}{(1+t)^4}\mathrm{d}t \geqslant 0$$

Ainsi :

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \int_0^x \frac{(x-t)^3}{(1+t)^4}\mathrm{d}t \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

d'où l'inégalité voulue :

$$\ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

4 Exercice 15

Indications : Ci-dessous l'énoncé de exercice détaillé en questions

1. *Montrer que* $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(k)}(x) = \dfrac{(k-1)!(-1)^{k-1}}{(x+1)^k}$.
2. *Montrer que* $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $|f^{(k)}(x)| \leqslant (k-1)!$.
3. *En déduire la convergence de* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Corrigé de l'exercice

La fonction $f : x \longrightarrow \ln(1+x)$ est de classe C^∞ sur $[0,+\infty[$ et on peut démontrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ (il faudrait l'écrire), que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0,$

$$f^{(k)}(x) = \frac{(k-1)!(-1)^{k-1}}{(x+1)^k}.$$

On en déduit que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0$:

$$\left| f^{(k)}(x) \right| = \frac{(k-1)!}{(x+1)^k} \leqslant (k-1)!$$

On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n entre 0 et $y > 0$, en majorant $\left| f^{(n+1)}(x) \right|$ par $n!$:

$$\left| \ln(1+y) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} y^k}{k} \right| \leqslant n! \frac{y^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{y^{n+1}}{(n+1)}.$$

On trouve en particulier que pour $y = 1$:

$$|\ln(2) - S_n| \leqslant \frac{1}{(n+1)}.$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{(n+1)} = 0$. Donc d'après le théorème encadrement (S_n) converge vers $\ln(2)$.