Dérivées successives

Exercice 1 (♣)

Calculer les dérivées n-ièmes des fonctions $\cos$ et $\sin$.

Exercice 2 (♣)

Calculer la dérivée n-ième de :

1. $g : x \mapsto \frac{1}{1+x}$
2. $h : x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$

Exercice 3 (♣)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \sqrt{x}\,.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \times \frac{(2n-2)!}{2^{n-1} \times (n-1)!} \times \frac{1}{x^{n-\frac{1}{2}}}\,.$$

Exercice 4 (♦)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{x\sqrt{3}} \sin(x)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{(n)}(x) = 2^n e^{x\sqrt{3}} \sin\left(x + n\frac{\pi}{6}\right).$$

Exercice 5 (♦)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)\,.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe P_n et Q_n deux polynômes à coefficients réels tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*\,, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)\,.$$

Exercice 6 (♣)

Montrer que la fonction $x \mapsto (x^2 + x + 1)\mathrm{e}^{-x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée n-ième.

Exercice 7 (♣)

Montrer que la fonction $x \mapsto x^2(1+x)^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée n-ième.

Exercice 8 (♦)

1. Donner une formule pour la dérivée k-ième de $x \mapsto (x^n)$ pour $k \leq n$.
2. En calculant de deux manières différentes la dérivée n-ième de $x \mapsto x^{2n}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 9 (♠)

Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Déterminer les fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables vérifiant $f(0) = f(1) = 0$ et $f'' = g$.

Exercice 10 (♣)

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} e^{1/t} & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

1. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier en $t = 0$.
2. Etudier l'existence de $f''(0)$.
3. (♦) Soit $t < 0$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que :
$$f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{t^{2n}} e^{1/t}$$
4. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11 (♣)

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^4 + 4x - 1$. Écrire ses développements de Taylor avec reste intégral :

1. à l'ordre 3 entre 0 et 2
2. à l'ordre 5 entre -1 et x.

Exercice 12 (♣)

Écrire le polynôme $P(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 1$ en fonction des polynômes $Q_k(x) = (x+2)^k$ pour $0 \leq k \leq 4$.

Exercice 13 (♣)

Écrire les développements de Taylor avec reste intégral des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \cos(x)$ à l'ordre 4 entre 0 et x.
2. $f(x) = \sqrt{1+x}$ à l'ordre 2 entre 0 et x.
3. $f(x) = \frac{1}{x}$ à l'ordre 3 entre 2 et x.
4. $f(x) = \exp(2x)$ à l'ordre 3 entre 0 et x.
5. $f(x) = \ln(1+3x)$ à l'ordre 3 entre 0 et x.

Exercice 14 (♥)

Montrer les inégalités suivantes :

1. Pour tout $(a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2$,
$$\left|e^{-b} - e^{-a} + (b-a)e^{-a}\right| \leq \frac{|a-b|^2}{2}.$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+x)^3} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Exercice 15 (♠)

En utilisant la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ définie sur $[0, +\infty[$, étudier la convergence de la suite $(S_n)_n$ définie pour $n \geq 1$ par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

♣ Du trèfle à brouter...
♥ À connaître par coeur.
♠ Qui s'y frotte s'y pique !
♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau !