Correction des exercices du TD 16

Table des matières

© M. Fontaine

1 Exercice 2

1. Commençons par montrer que f_1 est linéaire. Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f_1(\lambda X + Y) &= f_1\left(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} \lambda x_1 + y_1 - (\lambda x_2 + y_2) + \lambda x_3 + y_3 \\ \lambda x_1 + y_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda(x_1 - x_2 + x_3) + y_1 - y_2 + y_3 \\ \lambda x_1 + y_1 \end{pmatrix} \\
&= \lambda \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 - y_2 + y_3 \\ y_1 \end{pmatrix} \\
&= \lambda f(X) + f(Y)
\end{aligned}$$

Ainsi l'application f_1 est bien linéaire.

Déterminons son noyau. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f_1)$, on a alors :

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient alors les équations $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ et $x_1 = 0$. Ainsi

$$x_1 = 0 \quad \text{et} \quad x_2 = x_3.$$

Ainsi

$$\mathrm{Ker}(f_1) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x_1 = 0 \quad \text{et} \quad x_3 = x_2 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Le noyau de f_1 est engendré par un unique vecteur non nul, la famille est donc libre et génératrice et une base du noyau est donnée par : $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Déterminons l'image de f_1. La famille $(e_1, e_2, e_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ donc :

$$\mathrm{Im}(f_1) = \mathrm{Vect}\left(f_1(e_1), f_1(e_2), f_1(e_3)\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ engendre l'image de f_1, c'est donc une famille génératrice de l'image. De plus, elle est composée de deux vecteurs non colinéaires donc elle est libre. C'est donc une base de l'image.

2. Commençons par montrer que f_2 est linéaire. Soient $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f_2(\lambda X_1 + X_2) &= f_2\left(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} \lambda x_1 + x_2 + \lambda z_1 + z_2 \\ \lambda x_1 + x_2 - (\lambda y_1 + y_2) \\ 2(\lambda x_1 + x_2) + \lambda z_1 + z_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda(x_1 + z_1) + x_2 + z_2 \\ \lambda(x_1 - y_1) + x_2 - y_2 \\ \lambda(2x_1 + z_1) + 2x_2 + z_2 \end{pmatrix} \\
&= \lambda f_2(X_1) + f_2(X_2)
\end{aligned}$$

Ainsi f_2 est bien une application linéaire.

Déterminons son noyau. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f_2)$, on a : $f_2(X) = 0$ soit le système :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & & & + & z & = & 0 \\ x & - & y & & & = & 0 \\ 2x & & & + & z & = & 0 \end{array} \right.$$

On échelonne le système $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & & & + & z & = & 0 \\ & - & y & - & z & = & 0 \\ & & & - & z & = & 0 \end{array} \right.$$

On obtient $z = 0$, $y = 0$ et $x = 0$. Ainsi $\mathrm{Ker}(f_2) = \{0_{3,1}\}$.

Déterminons l'image de f_2. La famille $(e_1, e_2, e_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ donc :

$$\mathrm{Im}(f_2) = \mathrm{Vect}\,(f_2(e_1), f_2(e_2), f_2(e_3)) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ engendre $\mathrm{Im}(f_2)$, c'est donc une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f_2)$. Il reste à montrer qu'elle est libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient alors le système :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & - & \lambda_2 & & & = & 0 \\ 2\lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

On échelonne puis résout le système et on obtient $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. La famille de vecteurs est donc libre, puisqu'elle est génératrice de $\mathrm{Im}(f_2)$, c'est bien une base $\mathrm{Im}(f_2)$.

3. Commençons par montrer que f_3 est linéaire. Soient $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, $X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_3(\lambda X_1 + X_2) &= f_3\left(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda x_1 + x_2 + \lambda y_1 + y_2 \\ 2(\lambda x_1 + x_2) - (\lambda y_1 + y_2) \\ -(\lambda x_1 + x_2) + 2(\lambda y_1 + y_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda(x_1 + y_1) + x_2 + y_2 \\ \lambda(2x_1 - y_1) + 2x_2 - y_2 \\ \lambda(-x_1 + 2y_1) - x_2 + 2y_2 \end{pmatrix} \\ &= \lambda f_3(X_1) + f_3(X_2) \end{aligned}$$

Ainsi f_3 est bien une application linéaire.

Déterminons son noyau. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f_3)$, on a : $f_3(X) = 0$ soit le système :

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 0 \\ 2x & - & y & = & 0 \\ -x & + & 2y & = & 0 \end{array} \right.$$

On échelonne le système $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, on obtient :

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ \quad - 3y = 0 \\ \quad + 3y = 0 \end{cases}$$

On obtient $y = 0$ et $x = 0$. Ainsi $\mathrm{Ker}(f_3) = \{0_{2,1}\}$.

Déterminons l'image de f_3. La famille $(e_1, e_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ donc :

$$\mathrm{Im}(f_3) = \mathrm{Vect}\left(f_3(e_1), f_3(e_2)\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ engendre $\mathrm{Im}(f_3)$, c'est donc une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f_3)$. De plus, elle est composée de deux vecteurs non colinéaires, elle est donc libre. C'est donc une base de $\mathrm{Im}(f_3)$.

4. Commençons par montrer que f_4 est linéaire. Soient $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_4(\lambda X_1 + X_2) &= f_2\left(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \big(3(\lambda x_1 + x_2) - (\lambda y_1 + y_2) + 2(\lambda z_1 + z_2)\big) \\ &= \big(\lambda(3x_1 - y_1 + 2z_1) + 3x_2 - y_2 + 2z_2\big) \\ &= \lambda f_4(X_1) + f_4(X_2) \end{aligned}$$

Ainsi f_4 est bien une application linéaire.

Déterminons son noyau. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f_4)$, on a : $f_4(X) = 0$ soit :

$$3x - y + 2z = 0$$

i.e.

$$y = 3x + 2z$$

Ainsi

$$\mathrm{Ker(f_4)} \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y = 3x + 2z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 3x + 2z \\ z \end{pmatrix} \mid (x, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ engendre $\mathrm{Ker}(f_4)$ c'est donc une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(f_4)$. De plus, elle est libre car composée de deux vecteurs non colinéaires. C'est donc une base de $\mathrm{Ker}(f_4)$.

Déterminons l'image de f_4. La famille $(e_1, e_2, e_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ donc :

$$\mathrm{Im}(f_4) = \mathrm{Vect}\left(f_4(e_1), f_4(e_2), f_4(e_3)\right) = \mathrm{Vect}\left((3), (-1), (2)\right) = \mathrm{Vect}((1))$$

engendre $\mathrm{Im}(f_4)$, c'est donc une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f_4)$. Cette famille est libre car composée d'une unique vecteur non nul, c'est donc une base de $\mathrm{Im}(f_4)$.

5. Montrons que l'application f_5 est linéaire. Soient $X_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, $X_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f_5(\lambda X_1 + X_2) &= f_5(\lambda(x_1, y_1) + (x_2, y_2)) \\ &= f_5((\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2)) \\ &= (\lambda x_1 + x_2 + (\lambda y_1 + y_2), \lambda x_1 + x_2 - (\lambda y_1 + y_2), 2(\lambda x_1 + x_2) + 2(\lambda y_1 + y_2)) \\ &= (\lambda(x_1 + y_1) + x_2 + y_2, \lambda(x_1 - y_1) + x_2 - y_2, \lambda(2x_1 + 2y_1) + 2x_2 + 2y_2) \\ &= \lambda f_5((x_1, y_1)) + f_5((x_2, y_2)) \\ &= \lambda f_5(X_1) + f_5(X_2) \end{aligned}$$

Ainsi l'application f_5 est bien linéaire.
Déterminons le noyau de f_5. Soit $(x,y) \in \mathrm{Ker}(f_5)$, on a : $f_5((x,y)) = 0$, on obtient alors le système :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 0 \\ x & - & y & = & 0 \\ 2x & + & 2y & = & 0 \end{array}\right.$$

On a $L_3 = 2L_1$ donc le système équivaut au système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 0 \\ x & - & y & = & 0 \end{array}\right.$$

On échelonne ce système : $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 0 \\ & - & 2y & = & 0 \end{array}\right.$$

Ainsi $x = y = 0$ et $\mathrm{Ker}(f_5) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.
Déterminons l'image de f_5. La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $(e_1, e_2) = ((1,0),(0,1))$, ainsi :

$$\mathrm{Im}(f_5) = \mathrm{Vect}(f_5(e_1), f_5(e_2)) = \mathrm{Vect}((1,1,2),(1-1,2)).$$

La famille $((1,1,2),(1-1,2))$ engendre $\mathrm{Im}(f_5)$ et elle est libre car composée de deux vecteurs non colinéaires, c'est donc une base de $\mathrm{Im}(f_5)$.

6. Montrons que l'application f_6 est linéaire. Soient $X_1 = (x_1,y_1,z_1) \in \mathbb{R}^3$, $X_2 = (x_2,y_2,z_2) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} & f_6(\lambda X_1 + X_2) = f_6(\lambda(x_1,y_1,z_1) + (x_2,y_2,z_2)) \\ & = f_6((\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2, \lambda z_1 + z_2)) \\ & = (\lambda x_1 + x_2 + \lambda y_1 + y_2 + \lambda z_1 + z_2, \lambda x_1 + x_2 + \lambda y_1 + y_2 + \lambda z_1 + z_2, -2(\lambda x_1 + x_2) - 2(\lambda y_1 + y_2) - 2(\lambda z_1 + z_2)) \\ & = (\lambda(x_1 + y_1 + z_1) + x_2 + y_2 + z_2, \lambda(x_1 + y_1 + z_1) + x_2 + y_2 + z_2, \lambda(-2x_1 - 2y_1 - 2z_1) - 2x_2 - 2y_2 - 2z_2) \\ & = \lambda f_6(X_1) + f_6(X_2) \end{aligned}$$

Ainsi l'application f_6 est bien linéaire.
Déterminons le noyau de f_6. Soit $(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f_6)$, on a : $f_6((x,y,z)) = 0$, on obtient alors le système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \\ -2x & - & 2y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

On a $L_3 = -2L_1$ et $L_2 = L_1$ donc le système équivaut au système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$

On a donc $x = -y - z$ et

$$\mathrm{Ker}(f_6) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -y - z\right\} = \left\{(-y-z, y, z) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Ainsi

$$\mathrm{Ker}(f_6) = \mathrm{Vect}((-1,1,0),(-1,0,1)).$$

La famille $((-1,1,0),(-1,0,1))$ engendre $\mathrm{Ker}(f_6)$ et elle est libre car composée de deux vecteurs non colinéaires, c'est donc une base de $\mathrm{Ker}(f_6)$.
Déterminons l'image de f_6. La base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $(e_1,e_2,e_3) = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$, ainsi :

$$\mathrm{Im}(f_6) = \mathrm{Vect}(f_6(e_1), f_6(e_2), f_6(e_3)) = \mathrm{Vect}((1,1,-2),(1,1,-2),(1,1,-2)) = \mathrm{Vect}((1,1,-2)).$$

La famille $((1,1,-2))$ engendre $\mathrm{Im}(f_6)$ et elle est libre car composée d'un unique vecteur non nul donc c'est une base de $\mathrm{Im}(f_6)$.

7. Montrons que l'application f_7 est linéaire. Soient $X_1 = (x_1,y_1,z_1) \in \mathbb{R}^3$, $X_2 = (x_2,y_2,z_2) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} & f_7(\lambda X_1 + X_2) = f_7(\lambda(x_1,y_1,z_1) + (x_2,y_2,z_2)) \\ & = f_7((\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2, \lambda z_1 + z_2)) \\ & = (\lambda x_1 + x_2 + 2(\lambda y_1 + y_2) + 3(\lambda z_1 + z_2), \lambda x_1 + x_2 + 3(\lambda y_1 + y_2) + 5(\lambda z_1 + z_2), \lambda x_1 + x_2 + 4(\lambda y_1 + y_2) + 7(\lambda z_1 + z_2)) \\ & = (\lambda(x_1 + 2y_1 + 3z_1) + x_2 + 2y_2 + 3z_2, \lambda(x_1 + 3y_1 + 5z_1) + x_2 + 3y_2 + 5z_2, \lambda(x_1 + 4y_1 + 7z_1) + x_2 + 4y_2 + 7z_2) \\ & = \lambda f_7(X_1) + f_7(X_2) \end{aligned}$$

Ainsi l'application f_7 est bien linéaire.
Déterminons le noyau de f_7. Soit $(x, y, z) \in \text{Ker}(f_7)$, on a : $f_7((x, y, z)) = 0$, on obtient alors le système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ x & + & 3y & + & 5z & = & 0 \\ x & + & 4y & + & 7z & = & 0 \end{array}\right.$$

Echelonnons ce système, $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, le système équivaut au système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 2z & = & 0 \\ & & y & + & 2z & = & 0 \\ & & 2y & + & 4z & = & 0 \end{array}\right.$$

On remarque que $L_3 = 2L_2$ donc le système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ & & y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} x & = & z \\ y & = & -2z \end{array}\right.$$

$$\text{Ker}(f_7) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z, y = 2z\right\} = \{(z, -2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$

Ainsi

$$\text{Ker}(f_7) = \text{Vect}((1, -2, 1)).$$

La famille $((2, 2, 0))$ engendre $\text{Ker}(f_7)$ et elle est libre car composée d'un unique vecteur non nul, c'est donc une base de $\text{Ker}(f_7)$.
Déterminons l'image de f_7. La base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $(e_1, e_2, e_3) = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$, ainsi :

$$\text{Im}(f_7) = \text{Vect}(f_7(e_1), f_7(e_2), f_7(e_3)) = \text{Vect}((1, 1, 1), (2, 3, 4), (3, 5, 7)).$$

On remarque que $2e_2 - e_1 = e_3$ donc

$$\text{Im}(f_7) = \text{Vect}((1, 1, 1), (2, 3, 4)).$$

La famille $((1, 1, 1), (2, 3, 4))$ est génératrice de $\text{Im}(f_7)$ et elle est libre car composée de deux vecteurs non colinéaires, ainsi c'est une base de $\text{Im}(f_7)$.
Remarque : Si on ne voit pas une combinaison " à l'oeil " des 3 vecteurs $((1, 1, 1), (2, 3, 4), (3, 5, 7))$, on peut la trouver en cherchant $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $x(1, 1, 1) + y(2, 3, 4) + z(3, 5, 7) = (0, 0, 0)$. Cela revient à résoudre le même système que pour la détermination du noyau.

2 Exercice 3

1. La base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vaut $(e_1, e_2, e_3) = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$. Ainsi :

$$f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = f\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad ye_1 + ze_2 + xe_3 = \begin{pmatrix}y\\z\\x\end{pmatrix}$$

Ainsi l'expression de f est donnée pour tout $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ par :

$$f\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}y\\z\\x\end{pmatrix}$$

Montrons maintenant que f est linéaire.
Soient $X_1 = \begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $X_2 = \begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(\lambda X_1 + X_2) &= f\left(\lambda\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix}\lambda y_1 + y_2\\ \lambda z_1 + z_2)\\ \lambda x_1 + x_2\end{pmatrix} \\ &= \lambda f(X_1) + f(X_2) \end{aligned}$$

Ainsi f est bien linéaire.

2. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,
$$f \circ f \circ f(X) = f \circ f \left(\begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix} \right) = f \left(\begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$
Ainsi $f \circ f \circ f = \mathrm{Id}_E$. L'application f est donc bijective et $f^{-1} = f \circ f$.

3. Commençons par remarquer que $f \circ f$ est linéaire car c'est la composée de deux applications linéaires. Montrons maintenant la linéarité de g. Soient $(u, v) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} g(\lambda u + v) &= f(\lambda u + v) - f \circ f(\lambda u + v) \\ &= \lambda f(u) + f(v) - \lambda f \circ f(u) - f \circ f(v) \quad \text{par linéarité de } f \text{ et de } f \circ f \\ &= \lambda(f(u) - f \circ f(u)) + f(v) - f \circ f(v) \\ &= \lambda g(u) + g(v). \end{aligned}$$
Ainsi $g \in \mathcal{L}(E)$.

4. Déterminons le noyau de g. Soit $u \in \mathrm{Ker}(g)$ alors $g(u) = 0$ soit
$$f(u) = f \circ f(u)$$
composons cette égalité par f, on obtient :
$$f \circ f(u) = u.$$
Posons alors $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, résolvons le système $f \circ f(u) = u$:
$$\left\{ \begin{array}{rcl} z & = & x \\ x & = & y \\ y & = & z \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rrrrrrr} -x & & & & z & = & 0 \\ x & - & y & & & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \end{array} \right.$$
Echelonnons-le, $L_2 \leftarrow L_2 + L1$, on a :
$$\left\{ \begin{array}{rrrrrrr} -x & & & & z & = & 0 \\ & - & y & + & z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rrrrrrr} -x & & & & z & = & 0 \\ & - & y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$$
Ainsi $y = z$ et $x = z$ avec $z \in \mathbb{R}$. On a donc :
$$\mathrm{Ker}(g) = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$
La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ engendre $\mathrm{Ker}(g)$ et elle est constituée d'un unique vecteur non nul, elle est donc génératrice et libre, c'est une base de $\mathrm{Ker}(g)$.
Déterminons l'image de g. On a :
$$\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}(g(e_1), g(e_2), g(e_3)).$$
Or
$$g(e_1) = f(e_1) - f \circ f(e_1) = e_3 - f(e_3) = e_3 - e_2$$
et
$$g(e_2) = f(e_2) - f \circ f(e_2) = e_1 - f(e_1) = e_1 - e_3$$
et
$$g(e_3) = f(e_3) - f \circ f(e_3) = e_2 - f(e_2) = e_2 - e_1$$
On remarque que $g(e_1) + g(e_2) = e_1 - e_2 = -g(e_3)$, ainsi :
$$\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}(e_3 - e_2, e_1 - e_3)\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$
La famille $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ engendre $\mathrm{Im}(g)$ et est composée de deux vecteurs non colinéaires, c'est une base de $\mathrm{Im}(g)$

3 Exercice 4

1. Soit $P \in E$ alors $\deg(P) \leqslant n$ donc $\deg(P') \leqslant n-1$. Or $\deg(x-1) = 1$ donc d'après les propriétés sur les degrés, $\deg((x-1)P') \leqslant n$. De nouveau d'après les propriétés sur les degrés,
$$\deg(P + (x-1)P') \leqslant \max(\deg(P), \deg((x-1)P')) \leqslant n.$$
Ainsi $f(P) \in E$ et on a bien $f : E \to E$.
Montrons que f est une application linéaire. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(P, Q) \in E^2$, on a :
$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q)(x) + (1-x)(\lambda P + Q)'(x) \\ &= \lambda P(x) + Q(x) + (1-x)(\lambda P' + Q')(x) \quad \text{par linéarité de la dérivation} \\ &= \lambda(P(x) + (1-x)P'(x)) + Q(x) + (1-x)Q'(x) \\ &\lambda f(P) + f(Q). \end{aligned}$$
Ainsi f est bien une application linéaire et comme $f : E \to E$, $f \in \mathcal{L}(E)$.
2. La famille $(1, x, \ldots, x^n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$ donc :
$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(1), f(x), \ldots, f(x^n)).$$
Or $f(1) = 1$ et pour $p \in [\![1, n]\!]$, $f(x^p) = x^p + (1-x)px^{p-1} = (1-p)x^p + px^{p-1}$. On a donc :
$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(1, 1, -x^2 + 2x, \ldots, (1-n)x^n + nx^{n-1}) = \mathrm{Vect}(1, -x^2 + 2x, \ldots, (1-n)x^n + nx^{n-1}).$$
La famille $(1, -x^2 + 2x, \ldots, (1-n)x^n + nx^{n-1})$ engendre $\mathrm{Im}(f)$, elle est donc génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. De plus, elle est non nulle et échelonnée en degré, elle est donc libre et c'est une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3. On calcule et on obtient $f(Q)(x) = 0$.
4. D'après le calcul précédent, on peut affirmer que $Q \in \mathrm{Ker}(f)$ donc $\mathrm{Vect}(Q) \subset \mathrm{Ker}(f)$ car $\mathrm{Ker}(f)$ est un espace vectoriel.
Montrons l'inclusion réciproque.
Soit $P \in \mathrm{Ker}(f)$ alors $f(P) = 0$.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ une racine de P différente de 1, on a alors $P(\alpha) = 0$ et l'égalité $f(P) = 0$ évaluée en α nous donne : $(1-\alpha)P'(\alpha) = 0$. Comme $\alpha \neq 1$, on en déduit que $P'(\alpha) = 0$.
Dérivons ensuite l'égalité, $f(P) = 0$, on obtient :
$$P'(x) + (1-x)P''(x) - P'(x) = 0$$
évaluons-la en α, on obtient :
$$(1-\alpha)P''(\alpha) = 0$$
Comme $\alpha \neq 1$, on en déduit que $P''(\alpha) = 0$.
On conjecture donc que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $P^{(p)}(\alpha) = 0$. On montre ce résultat par récurrence (qu'il faudrait rédiger en utilisant la formule de Leibniz pour l'hérédité).
Comme pour tout $p \in \mathbb{N}$, $P^{(p)}(\alpha) = 0$, P est forcément le polynôme nul.
Ainsi si P possède une racine différente de 1, c'est le polynôme nul.
Supposons donc que $P \neq 0$, sa seule racine est donc 1, il existe donc $p \in \mathbb{N}$ et $C \in \mathbb{R}^*$ tels que :
$$P(x) = C(x-1)^p.$$
On va montrer que $p = 1$. Comme $P \in \mathrm{Ker}(f)$, on a $f(P) = 0$ et donc pour tout réel x
$$C(x-1)^p + C(1-x)p(x-1)^{p-1} = 0$$
soit en factorisant par $C(x-1)^p$,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad C(x-1)^p(1-p) = 0$$
Comme $C(x-1)^p \neq 0$, on en déduit que $1 - p = 0$ soit $p = 1$. Ainsi $P = C(x-1) \in \mathrm{Vect}(Q)$.
En conclusion, soit $P = 0$ soit il existe $C \in \mathbb{R}^*$ tel que $P(x) = C(x-1)$. Ainsi dans les deux cas, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P(x) = \lambda(x-1) \in \mathrm{Vect}(Q)$.
Conclusion, $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(Q)$.

4 Exercice 5

1. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(M_1, M_2) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned}\phi(\lambda M_1 + M_2) &= A(\lambda M_1 + M_2)\\ &= \lambda A M_1 + A M_2\\ &= \lambda \phi(M_1) + \phi(M_2)\end{aligned}$$

Ainsi ϕ est bien une application linéaire.

2. (a) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a :

$$\phi(M) = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{pmatrix}.$$

Soit $M \in \mathrm{Ker}(\phi)$, alors $\phi(M) = 0_2$. On obtient alors le système :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} a & + & 2c & = & 0 \\ 2a & + & 4c & = & 0 \\ b & + & 2d & = & 0 \\ 2b & + & 4d & = & 0 \end{array}\right.$$

On remarque que $L_2 = 2L_1$ et $L_4 = 2L_3$, il équivaut donc au système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} a & + & 2c & = & 0 \\ b & + & 2d & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} a & = & -2c \\ b & = & -2d \end{array}\right.$$

On a donc :

$$\mathrm{Ker}(\phi) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a = -2c \quad \text{et} \quad b = -2d \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid (a,d) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

On a donc :

$$\mathrm{Ker}(\phi) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ engendre $\mathrm{Ker}(\phi)$, elle est donc génératrice de $\mathrm{Ker}(\phi)$. De plus, elle est formée de deux vecteurs non colinéaires donc elle est libre. C'est donc une base de $\mathrm{Ker}(\phi)$.
Soit $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(\phi(E_{1,1}), \phi(E_{1,2}), \phi(E_{2,1}), \phi(E_{2,2})) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right).$$

Comme $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 2(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, on a :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right).$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right)$ engendre $\mathrm{Im}(\phi)$, elle est donc génératrice de $\mathrm{Im}(\phi)$. De plus, elle est formée de deux vecteurs non colinéaires donc elle est libre. C'est donc une base de $\mathrm{Im}(\phi)$.

(b) Le noyau de ϕ n'est pas réduit au vecteur nul donc l'application ϕ n'est pas injective.
L'application n'est pas non plus surjective car I_2 n'a pas d'antécédent par ϕ. En effet, la matrice A n'est pas inversible puisque $1 \times 4 - 2 \times 2 = 0$ donc il n'existe pas de matrice M tel que $AM = I_2$, autrement dit I_2 ne possède pas d'antécédent par ϕ.

3. (a) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\phi^2(M) = \phi(\phi(M)) = \phi(AM) = A^2M$. Or $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = 2A + 3I_2$, on a donc :

$$\phi^2(M) = (2A + 3I_2)M = 2AM + 3M = 2\phi(M) + 3\mathrm{Id}(M).$$

Ainsi $\phi^2 = 2\phi + 3\mathrm{Id}$.

(b) Partons de la relation $\phi^2 = 2\phi + 3\mathrm{Id}$, on a :

$$\phi^2 = 2\phi + 3\mathrm{Id} \iff \phi^2 - 2\phi = 3\mathrm{Id} \iff \phi \circ (\phi - 2\mathrm{Id}) = 3\mathrm{Id}$$

or comme ϕ est linéaire, on a :

$$\phi \circ (\phi - 2\mathrm{Id}) = 3\mathrm{Id} \iff \phi \circ \frac{1}{3}(\phi - 2\mathrm{Id}) = \mathrm{Id}$$

L'application ϕ est bien bijective et $\phi^{-1} = \dfrac{1}{3}(\phi - 2\mathrm{Id})$.

5 Exercice 8

Montrons le résultat par double implication.

$(\Rightarrow)$ Supposons que $g \circ f = 0$ et montrons que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.
Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$ alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On a alors :

$$g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = 0.$$

Ainsi $y \in \mathrm{Ker}(g)$ d'où l'inclusion.

$(\Leftarrow)$ Supposons que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$ et montrons que $g \circ f = 0$.
Soit $x \in E$, on a :

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

or $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$ et comme $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$, on a $f(x) \in \mathrm{Ker}(g)$ donc $g(f(x)) = 0$. Ainsi $g \circ f = 0$.

6 Exercice 10

1. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} f(\lambda X + Y) &= f\left(\begin{pmatrix} \lambda x_1 + y_1 \\ \lambda x_2 + y_2 \\ \lambda x_3 + y_3 \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda x_1 + y_1 + \lambda x_2 + y_2 + \lambda x_3 + y_3 \\ 2(\lambda x_2 + y_2) \\ \lambda x_1 + y_1 - (\lambda x_2 + y_2) + \lambda x_3 + y_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda(x_1 + x_2 + x_3) \\ \lambda(2x_2) \\ \lambda(x_1 - x_2 + x_3) \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} y_1 + y_2 + y_3 \\ 2y_2 \\ y_1 - y_2 + y_3 \end{pmatrix} \\ &= \lambda f(X) + f(Y) \end{aligned}$$

Ainsi f est bien une application linéaire.

2. Montrons que f est un projecteur et pour cela montrons que $f\circ f = f$. On a pour $\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
f\circ f\left(\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}\right) &= f\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1+x_2+x_3\\ 2x_2\\ x_1-x_2+x_3\end{pmatrix}\right)\\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} x_1+x_2+x_3+2x_2+x_1-x_2+x_3\\ 2(2x_2)\\ x_1+x_2+x_3-2x_2+x_1-x_2+x_3\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2x_1+2x_2+2x_3\\ 4x_2\\ 2x_1-2x_2+2x_3\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1+x_2+x_3\\ 2x_2\\ x_1-x_2+x_3\end{pmatrix}\\
&= f\left(\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

3. Déterminons son noyau. Soit $X=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}\in\mathrm{Ker}(f)$, on a : $f(X)=0$ et on obtient le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0\\ & & 2x_2 & & & = & 0\\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} x_1+x_3 & = & 0\\ x_2 & = & 0\end{array}\right.$$

On a donc :
$$\mathrm{Ker}(f)=\left\{\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}\ \mid\ x_1=-x_3, x_2=0\right\}=\left\{\begin{pmatrix} -x_3\\ 0\\ x_3\end{pmatrix}\ \mid\ x_3\in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right).$$

Déterminons son image. Soit (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}(f(e_1),f(e_2),f(e_3))=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\\ 0\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\\ 1\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\\ 0\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}\right)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\\ 0\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\\ 1\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right)$$

L'application f est donc le projecteur sur $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\\ 0\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\\ 1\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right)$.

7 Exercice 11

1. f étant un endomorphisme, il reste montrer que $f\circ f=f$ pour montrer que c'est un projecteur.
Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}
f\circ f((x,y,z)) &= f\left(\left(\frac{x+y+z}{2},y,\frac{x-y+z}{2}\right)\right)\\
&= \left(\frac{\frac{x+y+z}{2}+y+\frac{x-y+z}{2}}{2},y,\frac{\frac{x+y+z}{2}-y+\frac{x-y+z}{2}}{2}\right)\\
&= \left(\frac{x+y+z}{2},y,\frac{x-y+z}{2}\right)\\
&= f((x,y,z))
\end{aligned}$$

On a bien $f\circ f=f$.

2. Les calculs sont très similaires à l'exercice 10 (je ne les détaille pas mais il faudrait évidemment les écrire).
Une base $\mathrm{Ker}(f)$ est donnée par $\mathcal{B}=((-1,0,1))$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$ est donnée par $\mathcal{C}=((\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2}))$.
3. Comme f est un projecteur, on a $\mathbb{R}^3=\mathrm{Ker}(f)\oplus\mathrm{Im}(f)$. Ainsi la juxtaposition de $\mathcal{B}$ et de $\mathcal{C}$ donne une base de $\mathbb{R}^3$.

8 Exercice 12

1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ alors :
$$(x, y, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$
Ainsi par linéarité de f,
$$f((x, y, z)) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) = xe_1 - ye_1 + ze_3 = (x - y, 0, z)$$

2. Déterminons le noyau de f. Soit $(x, y, z) \in \mathrm{Ker}(f)$, on a : $f((x, y, z)) = (0, 0, 0)$. On obtient alors le système :
$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & - & y & & = & 0 \\ & & & z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} x & = & y \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$
On a alors :
$$\mathrm{Ker}(f) = \{(x, y, z) \mid x = y, z = 0\} = \{(x, x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1, 1, 0)).$$
La famille $((1, 1, 0))$ engendre $\mathrm{Ker}(f)$, c'est donc une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$. De plus, elle est composée d'un unique vecteur non nul donc elle est libre, c'est donc une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
Déterminons l'image de f. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a :
$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \mathrm{Vect}((e_1, -e_1, e_3)) = \mathrm{Vect}((e_1, e_3)) = \mathrm{Vect}((1, 0, 0), (0, 0, 1))$$
La famille ((1,0,0),(0,0,1)) engendre $\mathrm{Im}(f)$, c'est donc une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. De plus, elle est composée de deux vecteurs non colinéaires donc elle est libre, c'est donc une base de $\mathrm{Im}(f)$.

3. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :
$$f \circ f((x, y, z)) = f((x - y, 0, z)) = (x - y - 0, 0, z) = f((x, y, z)).$$
L'endomorphisme f est donc bien un projecteur et c'est le projecteur sur $\mathrm{Vect}((1, 0, 0), (0, 0, 1))$ parallèlement à $\mathrm{Vect}((1, 1, 0))$.

9 Exercice 13

1. Commençons par montrer que $F \cap G = \{0\}$. $Soit(x, y, z) \in F \cap G$, on a : $x - y + z = 0$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que $(x, y, z) = \lambda(1, 1, 1)$. Ainsi $(x, y, z) = (\lambda, \lambda, \lambda)$ donc l'égalité $x - y + z = 0$ devient $\lambda - \lambda + \lambda = 0$ soit $\lambda = 0$. Ainsi $(x, y, z) = (0, 0, 0$ et $F \cap G \subset \{0\}$. De plus comme F et G sont des espaces vectoriels, $\{0\} \subset F \cap G$. Ainsi $F \cap G = \{0\}$.
Montons ensuite que $\mathbb{R}^3 = F + G$. Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, $F + G \subset \mathbb{R}^3$. Commençons par déterminer des bases de F et G.
Pour G, la famille $((1, 1, 1))$ engendre G et elle est composée d'une unique vecteur non nul donc c'est une base de G.
Pour F, on a :
$$F = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a = b - c\} = \{(b - c, b, c) \mid (b, c) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}((1, 1, 0), (-1, 0, 1)).$$
La famille $((1, 1, 0), (-1, 0, 1))$ est génératrice de F et elle est composée de deux vecteurs non colinéaires donc c'est une base de F.
Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on cherche alors $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(x, y, z) = \lambda_1(1, 1, 0) + \lambda_2(-1, 0, 1) + \lambda_3(1, 1, 1)$. Cela revient à résoudre le système :
$$(\mathcal{S}) \quad \left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & x \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & y \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & z \end{array}\right.$$
On résout ce système en l'échelonnant $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$:
$$(\mathcal{S}) \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & x \\ & & \lambda_2 & & & = & y - x \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} \lambda_1 & = & 2y - x - z \\ \lambda_2 & = & y - x \\ \lambda_3 & = & x - y + z \end{array}\right.$$
On a alors :
$$(x, y, z) = (2y - x - z)(1, 1, 0) + (y - x)(-1, 0, 1) + (x - y + z)(1, 1, 1)$$
et $(2y - x - z)(1, 1, 0) + (y - x)(-1, 0, 1) \in F$ et $(x - y + z)(1, 1, 1) \in G$. On a donc montré que $\mathbb{R}^3 \subset F + G$ d'où $\mathbb{R}^3 = F + G$.
Comme on a montré précédemment que $F \cap G = \{0\}$, on peut conclure que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ i.e. F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

2. Comme $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, il existe un unique couple $(u, v) \in F \times G$ tel que $x = u + v$. Notons p le projecteur sur F parallèlement à G, on a alors $p(x) = u$ et u est donc le projeté de x sur F parallèlement à G.
D'après le calcul mené à la question précédent, tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ se décompose de la manière suivante :

$$(a, b, c) = (2a - b - c)(1, 1, 0) + (b - a)(-1, 0, 1) + (a - b + c)(1, 1, 1)$$

avec $(2a - b - c)(1, 1, 0) + (b - a)(-1, 0, 1) \in F$ et $(a - b + c)(1, 1, 1) \in G$. Ainsi le projeté de (a, b, c) sur F parallèlement à G vaut :

$$(2a - b - c)(1, 1, 0) + (b - a)(-1, 0, 1) = (3a - 2b - c, 2a - b - c, b - a).$$