Applications linéaires

Exercice 1 (♣)

Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f((x, y, z)) = x + y + 2z$
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f((x, y)) = x + y + 1$
3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f((x, y)) = xy$
4. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f((x, y)) = (xy, y)$
5. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f((x, y)) = (2x - 4y, 2)$
6. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f((x, y)) = (2x - 4y, 0)$
7. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f((x, y)) = (x^2, y^3)$
8. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)$

Exercice 2 (♥)

Montrer que les applications suivantes sont linéaires.
Déterminer une base de leur noyau et de leur image.

1. $$\begin{array}{rccc} f_1 : & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} \end{array}$$

2. $$\begin{array}{rccc} f_2 : & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x + z \\ x - y \\ 2x + z \end{pmatrix} \end{array}$$

3. $$\begin{array}{rccc} f_3 : & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x + y \\ 2x - y \\ -x + 2y \end{pmatrix} \end{array}$$

4. $$\begin{array}{rccc} f_4 : & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{1}(\mathbb{R}) \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 3x - y + 2z \end{pmatrix} \end{array}$$

5. $f_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,
$$f((x, y)) = (x + y, x - y, 2x + 2y)$$
6. $f_6 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ et $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,
$$f((x, y, z)) = (x + y + z, x + y + z, -2x - 2y - 2z)$$
7. $f_7 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ et $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,
$$f((x, y, z)) = (x + 2y + 3z, x + 3y + 5z, x + 4y + 7z)$$

Exercice 3 (♥)

Soit $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et soit (e_1, e_2, e_3) sa base canonique.
Soit f l'application de E dans E telle que :
$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = ye_1 + ze_2 + xe_3$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer $f \circ f \circ f$. En déduire que f est bijective et déterminer f^{-1}.
3. Soit g l'application de E dans E telles que :
$$\forall u \in E \qquad g(u) = f(u) - f \circ f(u)$$
Montrer que $g \in \mathcal{L}(E)$.
4. Déterminer une base du noyau et de l'image de g.

Exercice 4 (♥)

Soit $E = \mathbb{R}_n[x]$ et f une application définie sur E par :
$$f(P(x)) = P(x) + (1 - x)P'(x).$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3. Calculer $f(Q)(x)$ où $Q(x) = x - 1$.
4. (♠) En déduire $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 5 (♥)

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
On définit l'application $\phi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par :
$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad \phi(M) = AM.$$

1. Montrer que ϕ est une application linéaire.
2. Dans cette question, on suppose que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer une base $\mathrm{Ker}(\phi)$ et une base de $\mathrm{Im}(\phi)$.
   (b) L'application ϕ est-elle injective ? surjective ?
3. Dans cette question, on suppose que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Monter que ϕ^2 s'exprime en fonction de ϕ et Id (l'application identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) En déduire que ϕ est bijective et calculer ϕ^{-1}.

Exercice 6 (♠)

Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles. On définit l'application $S : \begin{cases} E \to E \\ u \mapsto S(u) = v \end{cases}$
où $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1}$.

1. Vérifier que S est un endomorphisme.
2. Déterminer son noyau et son image.

Exercice 7 (♠)

On note $E = \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ et φ_1, φ_2, φ_3 des applications définies pour tout $f \in E$ par :

$$\varphi_1(f) = \int_{-1}^{0} f(t)\mathrm{d}t,\ \varphi_2(f) = \int_{0}^{1} f(t)\mathrm{d}t,\ \varphi_3(f) = \int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t.$$

1. Monter que φ_1, φ_2, φ_3 sont des formes linéaires sur E.
2. La famille (φ_1, φ_2) est-elle libre ?
3. La famille $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est-elle libre ?

Exercice 8 (♥)

Soient E, F et G des espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$, montrer que :

$$g \circ f = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g).$$

Exercice 9 (♠)

Soit E un espace vectoriel et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E.

1. Démontrer les assertions suivantes :
   (a) f est injective ssi $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ est une famille libre.
   (b) f est surjective ssi $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de F.
   (c) f est bijective ssi $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ est une base de F.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}_2[x])$ tel que :
$$f((1,0,0)) = x^2,\ f((0,1,0)) = 1,\ f((0,0,1)) = x.$$
   Montrer que f est un isomorphisme.

Exercice 10 (♥)

Considérons l'application f définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \longmapsto & \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_2 \\ x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix} \end{array}.$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Montrer que f est un projecteur.
3. Déterminer ses caractéristiques.

Exercice 11 (♥)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$f((x,y,z)) = \left(\frac{x+y+z}{2}, y, \frac{x-y+z}{2}\right).$$

1. Montrer que f est un projecteur.
2. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base $\mathcal{C}$ de $\mathrm{Im}(f)$.
3. Montrer que la juxtaposition de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ donne une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 12 (♥)

On considère $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$f(e_1) = e_1, \quad f(e_2) = -e_1, \quad f(e_3) = e_3.$$

1. Déterminer l'image par f d'un élément $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le noyau et l'image de f et donner une base de chacun d'eux.
3. Montrer que f est un projecteur dont on précisera les caractéristiques.

Exercice 13 (♥)

On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$F = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a - b + c = 0\} \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}((1,1,1)).$$

1. Montrer que F et G sont supplémentaires.
2. Calculer le projeté d'un vecteur (a,b,c) sur F parallèlement à G.

♣ Du trêfle à brouter…
♥ À connaître par coeur.
♠ Qui s'y frotte s'y pique !
♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau !