Correction des exercices du TD 15

Table des matières

1 Exercice 1 — 2

2 Exercice 2 — 3

3 Exercice 3 — 3

4 Exercice 4 — 5

5 Exercice 5 — 7

6 Exercice 6 — 9

7 Exercice 7 — 11

8 Exercice 8 — 12

9 Exercice 9 — 12

10 Exercice 10 — 13

11 Exercice 11 — 14

12 Exercice 13 — 15

13 Exercice 14 — 16

1 Exercice 1

Pour calculer les différentes primitives, on s'aide du tableau du cours du paragraphe **Primitives usuelles**.

1. La fonction f_1 étant une somme de 3 termes, on calcule une primitive de chacun des trois termes.
   - x^2 est de la forme x^α avec $\alpha = 2$, d'après le cours, une primitive de x^2 est donc donnée par $\dfrac{1}{2+1}x^{2+1} = \dfrac{x^3}{3}$.
   - $-3x$ est de la forme $-3 \times x^\alpha$ avec $\alpha = 1$, d'après le cours, une primitive de $-3x$ est donc donnée par $-3 \times \dfrac{1}{1+1}x^{1+1} = \dfrac{-3}{2}x^2$.
   - 7 est une constante donc d'après le cours une primitive de 7 est $7x$.

   Ainsi une primitive F_1 de f_1 sur $\mathbb{R}$ est définie par :
   $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad F_1(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 7x$$

2. On écrit astucieusement que
   $$f_2(x) = \frac{x^4}{x^2} + \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2}$$
   puis on calcule une primitive de chacun de ces deux termes.
   - Comme dans 1., une primitive de x^2 est $\dfrac{x^3}{3}$.
   - $\dfrac{1}{x^2}$ est de la forme x^α avec $\alpha = -2$, ainsi une primitive de $\dfrac{1}{x^2}$ est $\dfrac{1}{-2+1}x^{-2+1} = -x^{-1} = -\dfrac{1}{x}$.

   Ainsi une primitive F_2 de f_2 sur $\mathbb{R}_+^*$ (ou $\mathbb{R}_-^*$) est définie par :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad F_2(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x}$$

3. La fonction f_3 semble être de la forme $u'u^\alpha$ avec $u(x) = 7x+1$ et $\alpha = 8$.
   Calculons $u'u^\alpha$. On a $u'(x) = 7$ donc
   $$u'u^\alpha = 7(7x+1)^8 = 7f_3(x)$$
   et par conséquent $f_3(x) = \frac{1}{7}u'(x)\left(u(x)\right)^8$. Or, une primitive de $u'u^8$ est $\frac{1}{9}u^9$ donc une primitive F_3 de f_3 sur $\mathbb{R}$ est définie par :
   $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad F_3(x) = \frac{1}{7} \times \frac{\left(u(x)\right)^9}{9} = \frac{1}{63}\left(7x+1\right)^9$$

4. La fonction f_4 semble être de la forme $u'u^\alpha$ avec $u(x) = x^2+x+1$ et $\alpha = -4$. Calculons $u'u^\alpha$. On a $u'(x) = 2x+1$ donc
   $$u'u^\alpha = (2x+1)(x^2+x+1)^{-4} = f_4(x)$$
   ainsi $f_4(x) = \frac{u'(x)}{(u(x))^4} = u'(x)\left(u(x)\right)^{-4}$. Or, une primitive de $u'u^{-4}$ est $\frac{u^{-3}}{-3}$ donc une primitive F_4 de f_4 sur $\mathbb{R}$ est définie par :
   $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad F_4(x) = \frac{\left(u(x)\right)^{-3}}{-3} = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{\left(x^2+x+1\right)^3}$$

5. La fonction f_5 semble être de la forme $u'u^\alpha$ avec $\alpha = 2$ et $u(x) = \ln(x)$. Calculons $u'u^\alpha$. On a $u'(x) = \frac{1}{x}$ donc
   $$u'u^\alpha = \frac{1}{x} \times (\ln(x))^2 = f_5(x)$$
   et par conséquent $f_5(x) = u'(x)\left(u(x)\right)^2$. Or, une primitive de $u'u^2$ est $\frac{1}{3}u^3$ donc une primitive F_5 de f_5 sur $\mathbb{R}_+^*$ est définie par :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad F_5(x) = \frac{\left(u(x)\right)^3}{3} = \frac{1}{3}\left(\ln(x)\right)^3$$

6. La fonction f_6 semble être de la forme $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u(x) = x^3+1$. Calculons $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$. On a $u'(x) = 3x^2$ et donc
   $$\frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}} = \frac{3}{2}\frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} = \frac{3}{2}f_6(x)$$

par conséquent :

$$f_6(x) = \frac{2}{3} \times \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

Or, une primitive de $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ est $\sqrt{u}$ donc une primitive F_6 de f_6 sur $]-1;+\infty[$ est définie par :

$$\forall x \in]-1;+\infty[\qquad F_6(x) = \frac{2}{3}\sqrt{u(x)} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3+1}$$

7. La fonction f_7 semble être de la forme $u'\mathrm{e}^u$ avec $u(x) = x^2 + 2x$. Calculons $u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$. On a $u'(x) = 2x + 2$ et donc

$$u'(x)\mathrm{e}^{u(x)} = (2x+2)\mathrm{e}^{x^2+2x} = 2(x+1)\mathrm{e}^{x^2+2x} = 2f_7(x)$$

par conséquent

$$f_7(x) = \frac{1}{2}u'\mathrm{e}^u$$

Une primitive de f_7 est donc donné par :

$$F_7(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2+x} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

2 Exercice 2

1. On a $\Delta = 16$ et donc les deux racines sont : $\alpha = -1$ et $\beta = 3$.
2. Soit x dans $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$. On a :

$$\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-3} = \frac{a(x-3) + b(x+1)}{(x+1)(x-3)} = \frac{(a+b)x - 3a + b}{x^2 - 2x - 3}$$

Par identification, pour que $f(x)$ soit égale à $\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-3}$, il suffit de prendre a et b de sorte que $a + b = 0$ et $-3a + b = 1$ d'où facilement $a = -\frac{1}{4}$ et $b = \frac{1}{4}$. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\} \qquad f(x) = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-3}\right)$$

3. La fonction f est de la forme

$$f = -\frac{1}{4}(g + h)$$

avec $g = \dfrac{1}{x+1}$ et $h = \dfrac{-1}{x-3}$.
La fonction g semble être de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = x + 1$. On a $\dfrac{u'}{u} = \dfrac{1}{x+1} = g(x)$, ainsi une primitive de g est $G(x) = \ln|x+1|$.
La fonction h semble être de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = x - 3$. On a $\dfrac{u'}{u} = \dfrac{1}{x-3} = -h(x)$, ainsi une primitive de h est $H(x) = -\ln|x-3|$.

Soit I un intervalle inclus dans son domaine de définition et soit F une primitive de f sur I. D'après ce qui précède :

$$\forall x \in I \qquad F(x) = -\frac{1}{4}\left(\ln|x+1| - \ln|x-3|\right)$$

3 Exercice 3

1. Commençons par déterminer une primitive de la fonction $f(x) = x^3 + x - 2$. Une primitive de f est donnée par :

$$F(x) = \frac{1}{3+1}x^{3+1} + \frac{1}{1+1}x^{1+1} - 2 \times x = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 2x.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}I_1 = \int_{-2}^{3}(x^3+x-2)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{-2}^{3} &= \left(\frac{1}{4}(3)^4+\frac{1}{2}(3)^2-2\times 3\right)-\left(\frac{1}{4}(-2)^4+\frac{1}{2}(-2)^2-2\times(-2)\right)\\ &= \frac{81}{4}+\frac{9}{2}-6-4-2-4\\ &= \frac{81+18-64}{4}\\ &= \frac{35}{4}\end{aligned}$$

2. Commençons par déterminer une primitive de la fonction $f(x)=\sqrt{2x+3}$. La fonction f semble être de la forme $u'u^\alpha$ avec $u(x)=2x+3$ et $\alpha=\frac{1}{2}$. Ainsi $u'(x)=2$ et on a alors :

$$u'u^\alpha = 2(2x+3)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2x+3} = 2f(x).$$

On a $f(x)=\frac{1}{2}u'u^\alpha$, une primitive de f est donc donnée par :

$$F(x)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(2x+3)^{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{\frac{3}{2}}(2x+3)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(2x+3)^{\frac{3}{2}}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}I_2 = \int_{3}^{11}\sqrt{2x+2}\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{3}(2x+3)^{\frac{3}{2}}\right]_{3}^{11}\\ &= \left(\frac{1}{3}(2\times 11+3)^{\frac{3}{2}}\right)-\left(\frac{1}{3}(2\times 3+3)^{\frac{3}{2}}\right)\\ &= \frac{1}{3}(25)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}(9)^{\frac{3}{2}}\\ &= \frac{1}{3}((25)^{\frac{1}{2}})^3-\frac{1}{3}((9)^{\frac{1}{2}})^3\\ &= \frac{1}{3}(\sqrt{25})^3-\frac{1}{3}(\sqrt{9})^3\\ &= \frac{125}{3}-\frac{27}{3}\\ &= \frac{98}{3}\end{aligned}$$

3. Commençons par déterminer une primitive de la fonction $f(t)=\frac{t^4}{\sqrt{t^5+3}}$. La fonction f semble être de la forme $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u(t)=t^5+3$. Ainsi $u'(t)=5t^4$ et on a alors :

$$\frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{5t^4}{2\sqrt{t^5+3}} = \frac{5}{2}\frac{t^4}{\sqrt{t^5+3}} = \frac{5}{2}f(t)$$

Ainsi $f(t)=\frac{2}{5}\times\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ et une primitive de f est donnée par :

$$F(t)=\frac{2}{5}\sqrt{t^5+3}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}I_3=\int_0^1\frac{t^4}{\sqrt{t^5+3}}\mathrm{d}t &= \left[\frac{2}{5}\sqrt{t^5+3}\right]_0^1\\ &= \frac{2}{5}\sqrt{1^5+3}-\frac{2}{5}\sqrt{0^5+3}\\ &= \frac{2}{5}\sqrt{4}-\frac{2}{5}\sqrt{3}\\ &= \frac{4-2\sqrt{3}}{5}\end{aligned}$$

4. $I_4 = \displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$.

   Commençons par chercher une primitive de $f(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} = \dfrac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{\sqrt{t}}$. La fonction f semble être de la forme $u'\mathrm{e}^u$ avec $u(t) = \sqrt{t}$. On a alors $u'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ et ainsi
   $$u'\mathrm{e}^u = \frac{1}{2\sqrt{t}}\mathrm{e}^{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}f(t)$$
   Donc $f(t) = 2u'(t)\mathrm{e}^{u(t)}$. Or, une primitive de $u'\mathrm{e}^u$ est e^u donc une primitive F de f sur $[1;2]$ est définie par :
   $$F(t) = 2\mathrm{e}^{u(t)} = 2\mathrm{e}^{\sqrt{t}}.$$
   Ainsi
   $$I_4 = \left[2\mathrm{e}^{\sqrt{t}}\right]_1^2 = 2\mathrm{e}^{\sqrt{2}} - 2\mathrm{e}^{\sqrt{1}} = 2\mathrm{e}^{\sqrt{2}} - 2\mathrm{e}.$$

5. $I_5 = \displaystyle\int_0^2 \frac{2x-1}{x^2-x+1}\mathrm{d}x$.

   Commençons par chercher une primitive de $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$. La fonction f semble être de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2 - x + 1$. On a alors $u'(x) = 2x - 1$ et ainsi
   $$\frac{u'}{u} = \frac{2x-1}{x^2-x+1} = f(x).$$
   Or, une primitive de $\frac{u'}{u}$ est $\ln|u|$ donc une primitive F de f sur $[0;2]$ est définie par $F(x) = \ln|u(x)| = \ln|x^2-x+1|$. Ainsi,
   $$I_5 = \left[\ln|x^2-x+1|\right]_0^2 = \ln|2^2-2+1| - \ln|0^2-0+1| = \ln(3) - \ln(1) = \ln(3).$$

4 Exercice 4

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 t\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t$.

   Posons $\begin{cases} u'(t) = \mathrm{e}^{2t} \\ v(t) = t \end{cases}$ alors $\begin{cases} u(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t} \\ v'(t) = 1 \end{cases}$

   Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$ donc par intégration par parties :
   $$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 u'(t)v(t)\mathrm{d}t \\ &= [u(t)v(t)]_0^1 - \int_0^1 u(t)v'(t)\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t} \times t\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \frac{1}{4}\mathrm{e}^2 + \frac{1}{4} \\ &= \frac{\mathrm{e}^2+1}{4} \end{aligned}$$

2. $I_2 = \displaystyle\int_1^2 t\ln(t)\mathrm{d}t$.

   Posons $\begin{cases} u'(t) = t \\ v(t) = \ln(t) \end{cases}$ alors $\begin{cases} u(t) = \frac{t^2}{2} \\ v'(t) = \frac{1}{t} \end{cases}$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1;2]$ donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_1^2 u'(t)v(t)\mathrm{d}t \\
&= [u(t)v(t)]_1^2 - \int_1^2 u(t)v'(t)\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{t^2}{2}\ln(t)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{t}{2}\mathrm{d}t \\
&= 2\ln(2) - \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_1^2 \\
&= 2\ln(2) - \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

3. $I_3 = \displaystyle\int_0^1 (x^2+1)\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x$

Posons $\begin{cases} u'(x) = \mathrm{e}^{3x} \\ v(x) = x^2+1 \end{cases}$ alors $\begin{cases} u(x) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} \\ v'(x) = 2x \end{cases}$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$ donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_0^1 u'(x)v(x)\mathrm{d}x \\
&= [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x)\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{3}(x^2+1)\mathrm{e}^{3x}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}\times 2x\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{3}\mathrm{e}^3 - \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\int_0^1 x\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Il faut alors faire de nouveau une intégration par parties pour calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x$.

Posons $\begin{cases} u'(x) = \mathrm{e}^{3x} \\ v(x) = x \end{cases}$ alors $\begin{cases} u(x) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$ donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x &= \int_0^1 u'(x)v(x)\mathrm{d}x \\
&= [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x)\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{3}x\mathrm{e}^{3x}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}\mathrm{e}^3 - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3}\mathrm{e}^3 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\mathrm{e}^3 - \frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{2}{9}\mathrm{e}^3 + \frac{1}{9}
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{2}{3}\mathrm{e}^3 - \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{9}\mathrm{e}^3 + \frac{1}{9}\right) \\
&= \frac{18}{27}\mathrm{e}^3 - \frac{9}{27} - \frac{4}{27}\mathrm{e}^3 - \frac{2}{27} \\
&= \frac{14}{27}\mathrm{e}^3 - \frac{11}{27}
\end{aligned}$$

donc

$$I_3 = \frac{14\mathrm{e}^3 - 11}{27}$$

4. $I_4 = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}\mathrm{d}t$

Posons $\begin{cases} u'(t) = \frac{1}{t^2} \\ v(t) = \ln(1+t) \end{cases}$ alors $\begin{cases} u(t) = -\frac{1}{t} \\ v'(t) = \frac{1}{1+t} \end{cases}$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1;2]$ donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_1^2 u'(t)v(t)\mathrm{d}t \\ &= [u(t)v(t)]_1^2 - \int_1^2 u(t)v'(t)\mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{1}{t}\ln(1+t)\right]_1^2 - \int_1^2 -\frac{1}{t} \times \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{2}\ln(3) + \ln(2) + \int_1^2 \frac{1}{t(t+1)}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Il reste à calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t(t+1)}\mathrm{d}t$. Remarquons que :

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} = \frac{t+1}{t(t+1)} - \frac{t}{t(t+1)} = \frac{1}{t(t+1)}$$

on a alors :

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{t(t+1)}\mathrm{d}t &= \int_1^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_1^2 \frac{1}{t}\mathrm{d}t - \int_1^2 \frac{1}{t+1}\mathrm{d}t \\ &= [\ln(t)]_1^2 - [\ln(t+1)]_1^2 \\ &= \ln(2) - (\ln(3) - \ln(2)) \\ &= 2\ln(2) - \ln(3) \end{aligned}$$

Finalement, $I_4 = -\dfrac{1}{2}\ln(3) + \ln(2) + 2\ln(2) - \ln(3)$ c'est à dire

$$I_4 = 3\ln(2) - \frac{3}{2}\ln(3)$$

5 Exercice 5

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$
   - on pose $t = x + 1 = u(x)$ donc $x = t - 1$.
     La fonction $u : x \mapsto x + 1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$ et pour tout x dans $[0;1]$, on a $u'(x) = 1$.
   - $t = u(x)$ donc $\mathrm{d}t = u'(x)\mathrm{d}x$ donc $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$ donc $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$.
   - On a :
   $$\frac{x}{\sqrt{x+1}} = \frac{t-1}{\sqrt{t}} = \frac{t}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{\sqrt{t}\times\sqrt{t}}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{t}} = \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}$$
   - si $x = 0$ alors $t = 1$ et si $x = 1$ alors $t = 2$.

   donc par changement de variable :
   $$I_1 = \int_1^2 \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t = \left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{t}\right]_1^2 = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{3}$$

2. $I_2 = \displaystyle\int_1^{4/3} \frac{x^2}{(3x-2)^5}\mathrm{d}x$

- on pose $t = 3x - 2 = u(x)$ donc $x = \frac{t+2}{3}$.
  La fonction $u : x \mapsto 3x - 2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[1; \frac{4}{3}\right]$ et pour tout x dans $\left[1; \frac{4}{3}\right]$, on a $u'(x) = 3$.
- $t = u(x)$ donc $\mathrm{d}t = u'(x)\mathrm{d}x$ donc $\mathrm{d}t = 3\mathrm{d}x$ donc $\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\mathrm{d}t$.
- On a :

$$\frac{x^2}{(3x-2)^5} = \frac{\left(\frac{t+2}{3}\right)^2}{t^5} = \frac{(t+2)^2}{9t^5} = \frac{t^2+4t+4}{9t^5}$$

- si $x = 1$ alors $t = 1$ et si $x = \frac{4}{3}$ alors $t = 2$.

donc par changement de variable :

$$I_2 = \int_1^2 \frac{t^2+4t+4}{9t^5} \times \frac{1}{3}\mathrm{d}t = \frac{1}{27}\int_1^2 \frac{t^2+4t+4}{t^5}\mathrm{d}t$$

Or, $\dfrac{t^2+4t+4}{t^5} = \dfrac{t^2}{t^5} + \dfrac{4t}{t^5} + \dfrac{4}{t^5} = t^{-3} + 4t^{-4} + 4t^{-5}$ donc

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{27}\int_1^2 \left(t^{-3} + 4t^{-4} + 4t^{-5}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{27}\left[\frac{t^{-2}}{-2} + 4 \times \frac{t^{-3}}{-3} + 4 \times \frac{t^{-4}}{-4}\right]_1^2 \\
&= \frac{1}{27}\left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{6} - \frac{1}{16} - \left(-\frac{1}{2} - \frac{4}{3} - 1\right)\right) \\
&= \frac{1}{27} \times \frac{119}{48} \\
&= \frac{119}{1296}
\end{aligned}$$

3. $I_3 = \displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1-\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$
   - on pose $t = \mathrm{e}^x = u(x)$ donc $x = \ln(t)$.
     La fonction $u : x \mapsto \mathrm{e}^x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1; 2]$ et pour tout x dans $[1; 2]$, on a $u'(x) = \mathrm{e}^x$.
   - $t = u(x)$ donc $\mathrm{d}t = u'(x)\mathrm{d}x$ donc $\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.
   - On a :

$$\frac{\mathrm{e}^{2x}}{1-\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x} \times \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \frac{t}{1-t}\mathrm{d}t$$

   - si $x = 1$ alors $t = \mathrm{e}$ et si $x = 2$ alors $t = \mathrm{e}^2$.

   donc par changement de variable :

$$I_3 = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{t}{1-t}\mathrm{d}t$$

   Petite astuce pour calculer cette intégrale :

$$\frac{t}{1-t} = \frac{t-1+1}{1-t} = -1 + \frac{1}{1-t}.$$

   Ainsi :

$$I_3 = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} -1 + \frac{1}{1-t}\mathrm{d}t = \left[-t - \ln|1-t|\right]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}$$

   Or, $1 - \mathrm{e}^2 < 0$ et $1 - \mathrm{e} < 0$ donc

$$I_3 = -\mathrm{e}^2 - \ln(\mathrm{e}^2 - 1) + \mathrm{e} + \ln(\mathrm{e} - 1)$$

   c'est à dire

$$I_3 = \ln(\mathrm{e} - 1) - \ln(\mathrm{e}^2 - 1) + \mathrm{e} - \mathrm{e}^2$$

4. $I_4 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^x + 1}\mathrm{d}x$
   - on pose $t = \mathrm{e}^x = u(x)$ donc $x = \ln(t)$.
     La fonction $u : x \mapsto \mathrm{e}^x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$ et pour tout x dans $[0; 1]$, on a $u'(x) = \mathrm{e}^x$.
   - $t = u(x)$ donc $\mathrm{d}t = u'(x)\mathrm{d}x$ donc $\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.
   - On a :

$$\frac{1}{\mathrm{e}^x + 1}\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x + 1)} \times \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \frac{1}{t(t+1)}\mathrm{d}t$$

- si $x=0$ alors $t=1$ et si $x=1$ alors $t=\mathrm{e}$.

donc par changement de variable :

$$I_4=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{1}{t(t+1)}\mathrm{d}t$$

Petite astuce pour calculer cette intégrale, remarquons que :

$$\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}=\frac{1}{t(t+1)}.$$

Ainsi :

$$I_4=\int_1^{\mathrm{e}}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t$$

donc

$$I_4=[\ln|t|-\ln|t+1|]_1^{\mathrm{e}}=1-\ln(1+\mathrm{e})+\ln(2)$$

5. $I_5=\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$
   - On pose pour $u\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $t=\sin(u)=g(u)$.
     La fonction $g:u\mapsto\sin(u)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ et réalise une bijection de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ vers $[0,1]$ et pour tout u dans $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $g'(u)=cos(u)$.
   - $t=\sin(u)$ donc $\mathrm{d}t=g'(u)\mathrm{d}u$ donc $\mathrm{d}t=\cos(u)\mathrm{d}u$.
   - On a :
   $$\sqrt{1-t^2}=\sqrt{1-\sin(u)^2}$$
   - Si $t=0$ alors $u=0$ et si $t=1$ alors $u=\dfrac{\pi}{2}$.

   On a donc par changement de variables :

   $$I_5=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin(u)^2}\cos(u)\mathrm{d}u.$$

   Ainsi :

   $$\begin{aligned}I_5&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos(u)^2}\cos(u)\mathrm{d}u\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos(u)|\cos(u)\mathrm{d}u\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos(u))^2\mathrm{d}u\end{aligned}$$

   Or $\cos(2u)=\cos(u)^2-\sin(u)^2=\cos(u)^2-(1-\cos(u)^2)=2\cos(u)^2-1$ donc

   $$\cos(u)^2=\frac{1+\cos(2u)}{2}.$$

   Ainsi

   $$I_5=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos(2u)}{2}\mathrm{d}u=\left[\frac{u}{2}+\frac{\sin(2u)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}+\frac{\sin(\pi)}{4}-0=\frac{\pi}{4}.$$

6 Exercice 6

C'est la même stratégie pour les trois intégrales : étudier le signe de l'expression située à l'intérieur de la valeur absolue puis utiliser la relation de Chasles pour écrire l'intégrale à calculer comme somme d'intégrales ne contenant plus de valeur absolue.

1. $I_1=\displaystyle\int_0^5 t\,|t^2-1|\,\mathrm{d}t$

   Voici le signe de $t^2-1=(t-1)(t+1)$ pour $t\in[0;5]$:

t	0		1		5
t^2-1		$-$	0	$+$	

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 t(1-t^2)\mathrm{d}t + \int_1^5 t(t^2-1)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 (t-t^3)\mathrm{d}t + \int_1^5 (t^3-t)\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{4}\right]_0^1 + \left[\frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2}\right]_1^5 \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{625}{4} - \frac{25}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{577}{4}
\end{aligned}$$

2. $I_2 = \displaystyle\int_0^2 |x^3 - x^2 + x - 1|\mathrm{d}x$

   Posons $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$. Il est clair que 1 est racine évidente de P donc $P(x)$ est factorisable par $(x-1)$. On trouve (en effectuant une division euclidienne ou par identification)

$$P(x) = (x-1)(x^2+1)$$

   Or $x^2 + 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $P(x)$ est du signe de $(x-1)$:

x	0		1		2
x^3-x^2+x-1		$-$	0	$+$	

   Par conséquent :

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 (-x^3 + x^2 - x + 1)\mathrm{d}x + \int_1^2 (x^3 - x^2 + x - 1)\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x\right]_1^2 \\
&= -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 + 4 - \frac{8}{3} + 2 - 2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 \\
&= \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

3. $I_3 = \displaystyle\int_0^5 \frac{t-1}{|t^2-2t|+1}\mathrm{d}t$

   Voici le signe de $t^2 - 2t = t(t-2)$ pour $t \in [0;5]$:

t	0		2		5
t	0	$+$		$+$	
$t-2$		$-$	0	$+$	
t^2-2t	0	$-$	0	$+$	

   Par conséquent :

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_0^2 \frac{t-1}{-t^2+2t+1}\mathrm{d}t + \int_2^5 \frac{t-1}{t^2-2t+1}\mathrm{d}t \\
&= \left[-\frac{1}{2}\ln|-t^2+2t+1|\right] 0^2 + \left[\frac{1}{2}\ln|t^2-2t+1|\right]_2^5 \\
&= 0 - 0 + \frac{1}{2}\ln(16) - 0 \\
&= 2\ln(2)
\end{aligned}$$

7 Exercice 7

1. (a) La fonction f est de la forme $\ln(u)$ avec $u(x) = x + \sqrt{x^2+2}$. On a d'une part :

$$u'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{\sqrt{x^2+2}+x}{\sqrt{x^2+2}}$$

et donc $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = u'(x) \times \dfrac{1}{u(x)}$:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+2}+x}{\sqrt{x^2+2}} \times \frac{1}{x+\sqrt{x^2+2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}.$$

(b) D'après ce qui précède :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\mathrm{d}x = \int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x = [f(x)]_0^1$$

donc

$$I = \left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)\right]_0^1 = \ln(1+\sqrt{3}) - \ln(\sqrt{2})$$

2. (a) Par linéarité de l'intégrale, on a successivement :

$$\begin{aligned} J + 2I &= \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\mathrm{d}x + 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{x^2+2}}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{\sqrt{x^2+2}\times\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+2}}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\mathrm{d}x \\ &= K \end{aligned}$$

(b) $K = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2+2}\mathrm{d}x = \int_0^1 1\times\sqrt{x^2+2}\mathrm{d}x.$

Posons $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \sqrt{x^2+2} \end{cases}$ alors $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} \end{cases}$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$ donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned} K &= \int_0^1 u'(x)v(x)\mathrm{d}x \\ &= [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x)\mathrm{d}x \\ &= \left[x\sqrt{x^2+2}\right]_0^1 - \int_0^1 x\times\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}\mathrm{d}x \\ &= \sqrt{3} - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\mathrm{d}x \\ &= \sqrt{3} - J \end{aligned}$$

(c) Les réels J et K vérifient donc le système :

$$\begin{cases} K - J = 2I \\ K + J = \sqrt{3} \end{cases}$$

$L_1 + L_2$ donne $2K = 2I + \sqrt{3}$.
$L_2 - L_1$ donne $2J = \sqrt{3} - 2I$.

Sachant que $I = \ln(1+\sqrt{3}) - \ln(\sqrt{2})$, on a donc :

$$K = \frac{\sqrt{3}}{2} + \ln(1+\sqrt{3}) - \ln(\sqrt{2})$$

et

$$J = \frac{\sqrt{3}}{2} - \ln(1+\sqrt{3}) + \ln(\sqrt{2})$$

8 Exercice 8

Soit $a > 0$. Posons $J_a = \displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

- on pose $t = \frac{1}{x} = u(x)$ donc $x = \frac{1}{t}$.
  La fonction $u : x \mapsto \frac{1}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[\frac{1}{a}; a\right]$ ou $\left[a; \frac{1}{a}\right]$ car $a > 0$ et pour tout x dans $\left[\frac{1}{a}; a\right]$ ou $\left[a; \frac{1}{a}\right]$, on a $u'(x) = -\frac{1}{x^2}$.
- $\mathrm{d}t = u'(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = -t^2\mathrm{d}x$ donc $\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$.
- On a :

$$\frac{\ln(x)}{1+x^2} = \frac{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2} = \frac{-\ln(t)}{1+\frac{1}{t^2}}$$

- si $x = \frac{1}{a}$ alors $t = a$ et si $x = a$ alors $t = \frac{1}{a}$.

donc par changement de variable :

$$J_a = \int_a^{\frac{1}{a}} \frac{-\ln(t)}{1+\frac{1}{t^2}} \times -\frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \int_a^{\frac{1}{a}} \frac{\ln(t)}{t^2+1}\mathrm{d}t = -\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

c'est à dire $J_a = -J_a$ donc $2J_a = 0$ et par conséquent $J_a = 0$.

9 Exercice 9

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln(x))^n \mathrm{d}x$.

1. La fonction $x \mapsto (\ln(x))^n$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc en particulier sur $[1; \mathrm{e}]$ donc l'intégrale I_n existe.
2. $I_0 = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} 1\mathrm{d}x = [x]_1^{\mathrm{e}} = \mathrm{e} - 1$ et $I_1 = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\mathrm{d}x$.
   Pour calculer I_1 : IPP, cf Exemple 16.9 du cours.
   D'où :
   $$I_1 = [x\ln(x) - x]_1^{\mathrm{e}} = \mathrm{e} - \mathrm{e} - (-1) = 1$$
3. Soit n dans $\mathbb{N}$. Par linéarité de l'intégrale :
   $$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_1^{\mathrm{e}} (\ln(x))^{n+1}\mathrm{d}x - \int_1^{\mathrm{e}} (\ln(x))^n \mathrm{d}x \\ &= \int_1^{\mathrm{e}} \left((\ln(x))^{n+1} - (\ln(x))^n\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_1^{\mathrm{e}} (\ln(x))^n\left(\ln(x) - 1\right)\mathrm{d}x \end{aligned}$$
   Or, $x \in [1; \mathrm{e}]$ donc $x \geqslant 1$ donc $\ln(x) \geqslant 0$ et $(\ln(x))^n \geqslant 0$. De plus, $x \leqslant \mathrm{e}$ donc $\ln(x) \leqslant \ln(\mathrm{e})$ donc $\ln(x) - 1 \leqslant 0$ et finalement $(\ln(x))^n(\ln(x) - 1) \leqslant 0$ avec $1 \leqslant \mathrm{e}$ donc par positivité de l'intégrale, on obtient :
   $$\int_1^{\mathrm{e}} (\ln(x))^n\left(\ln(x) - 1\right)\mathrm{d}x \leqslant 0$$
   i.e. $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$, ce qui prouve que la suite (I_n) est décroissante. D'autre part, on a montré que pour tout $x \in [1; \mathrm{e}]$, on a $(\ln(x))^n \geqslant 0$ avec $1 \leqslant \mathrm{e}$ donc par positivité de l'intégrale, on obtient :
   $$\int_1^{\mathrm{e}} (\ln(x))^n \mathrm{d}x \geqslant 0$$
   i.e. $I_n \geqslant 0$. Ainsi, la suite (I_n) est décroissante et minorée par 0, donc d'après le théorème de convergence monotone, elle converge. Soit ℓ sa limite.

4. Pour montrer cette relation, nous allons effectuer une intégration par parties sur l'intégrale I_{n+1}.
Soit n dans $\mathbb{N}$. Posons $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = (\ln(x))^{n+1} \end{cases}$
alors $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = (n+1) \times \dfrac{1}{x} \times (\ln(x))^n \end{cases}$
Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1;\mathrm{e}]$ donc par intégration par parties :
$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_1^{\mathrm{e}} u'(x)v(x)\mathrm{d}x \\ &= [u(x)v(x)]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} u(x)v'(x)\mathrm{d}x \\ &= \left[x(\ln(x))^{n+1}\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} x \times (n+1) \times \frac{1}{x} \times (\ln(x))^n \mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e} - 0 - (n+1)\int_1^{\mathrm{e}} (\ln(x))^n \mathrm{d}x \end{aligned}$$
i.e. $I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)I_n$.
5. Soit n dans $\mathbb{N}$. On sait que pour tout $m \in \mathbb{N}$ on a $I_m \geqslant 0$ donc en particulier $I_{n+1} \geqslant 0$ et donc d'après la question précédente, $\mathrm{e} - (n+1)I_n \geqslant 0$ ce qui s'écrit
$$(n+1)I_n \leqslant \mathrm{e}.$$
En divisant par $n+1 > 0$, on obtient
$$0 \leqslant I_n \leqslant \tfrac{\mathrm{e}}{n+1}.$$
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}}{n+1} = 0$ donc le théorème d'encadrement s'applique et permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ *i.e.* $\ell = 0$.

10 Exercice 10

1. Soit $x \in [0,1]$ alors : $0 \leqslant x^n \leqslant 1$ donc $1 \leqslant 1 + x^n \leqslant 2$. Par décroissance de la fonction inverse, on a donc :
$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+x^n} \leqslant 1.$$
Comme $x^n \geqslant 0$, on a :
$$\frac{x^n}{2} \leqslant \frac{x^n}{1+x^n} \leqslant 1.$$
Par croissance de l'intégrale sur $[0,1]$, on obtient donc :
$$\frac{1}{2}\int_0^1 x^n \mathrm{d}x \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 x^n \mathrm{d}x.$$
Or $\displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$ donc :
$$\frac{2}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, on en déduit avec le théorème d'encadrement que $(I_n)_n$ converge vers 0.
2. On a :
$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1+x^n-x^n}{1+x^n}\mathrm{d}x = \int_0^1 1 - \frac{1}{1+x^n}\mathrm{d}x$$
donc par linéarité de l'intégrale, on a :
$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\mathrm{d}x = 1 - I_n.$$
Ainsi :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} 1 - I_n = 1.$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$J_n = nI_n = \int_0^1 \frac{nx^n}{1+x^n}\mathrm{d}x = \int_0^1 x \times \frac{nx^{n-1}}{1+x^n}\mathrm{d}x$$

Posons $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{nx^{n-1}}{1+x^n} \\ v(x) = x \end{cases}$ alors $\begin{cases} u(x) = \ln(1+x^n) \\ v'(x) = x \end{cases}$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$ donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned} nJ_n &= [x\ln(1+x^n)]_0^1 - \int_0^1 1 \times \ln(1+x^n)\mathrm{d}x \\ &= \ln(2) - \int_0^1 \ln(1+x^n)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

(b) Posons pour $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = \ln(1+x)$. La fonction $x \mapsto 1+x$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par composée f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Comme $x \in \mathbb{R}_+$, $1 \leqslant 1+x$ et donc par décroissance de la fonction inverse, on a :

$$0 \leqslant f'(x) \leqslant 1.$$

Soit $t \in \mathbb{R}_+$, d'après l'inégalité des accroissement finis appliquée sur $[0,t]$, on obtient :

$$0(t-0) \leqslant f(t) - f(0) \leqslant 1(t-0)$$

i.e.

$$0 \leqslant \ln(1+t) \leqslant t.$$

(c) Soit $x \in [0,1]$, on a alors $x^n \geqslant 0$ et donc d'après l'inégalité montrée à la question précédente, on a :

$$0 \leqslant \ln(1+x^n) \leqslant x^n$$

donc par croissance de l'intégrale on a :

$$0 \leqslant \int_0^1 \ln(1+x^n)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\mathrm{d}x.$$

Ainsi

$$0 \leqslant \int_0^1 \ln(1+x^n)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

On a donc :

$$0 \geqslant -\int_0^1 \ln(1+x^n)\mathrm{d}x \geqslant -\frac{1}{n+1}$$

et donc

$$\ln(2) \geqslant \ln(2) - \int_0^1 \ln(1+x^n)\mathrm{d}x \geqslant \ln(2) - \frac{1}{n+1}$$

i.e.

$$\ln(2) - \frac{1}{n+1} \leqslant J_n \leqslant \ln(2).$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(2) - \dfrac{1}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(2) = \ln(2)$, on en déduit avec le théorème d'encadrement que (J_n) converge vers $\ln(2)$.

11 Exercice 11

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les intégrales :

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2)\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

1. (a) $J_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln(2).$

   (b) Soit x dans $[0;1]$. On a :

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \iff 0^2 \leqslant x^2 \leqslant 1^2 \iff 1 \leqslant 1+x^2 \leqslant 2 \iff 1 \geqslant \frac{1}{1+x^2} \geqslant \frac{1}{2}.$$

   Or $\dfrac{1}{2} \geqslant 0$, alors $0 \leqslant \frac{1}{1+x^2} \leqslant 1$ donc en multipliant par $x^n \geqslant 0$, on obtient $0 \leqslant \frac{x^n}{1+x^2} \leqslant x^n$ et puisque $0 \leqslant 1$, par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 0\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\mathrm{d}x$$

   Or $\displaystyle\int_0^1 0\mathrm{d}x = 0$ et $\displaystyle\int_0^1 x^n\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$. Ainsi :

$$0 \leqslant J_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

   (c) Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, le théorème d'encadrement s'applique et on peut conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$.

2. (a) Intégrons par parties l'intégrale I_n. Posons $\begin{cases} u'(x) = x^n \\ v(x) = \ln(1+x^2) \end{cases}$ alors $\begin{cases} u(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ v'(x) = \frac{2x}{1+x^2} \end{cases}$

   Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$ donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 u'(x)v(x)\mathrm{d}x \\ &= [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x)\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(1+x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} \times \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1}J_{n+2} \end{aligned}$$

   (b) D'après la question **1.(b)** on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} J_{n+2} = 0$. De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n+1} = 0$ donc par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n+1}J_{n+2} = 0$. Enfin, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(2)}{n+1} = 0$ d'où facilement $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

12 Exercice 13

1. Non corrigé

2. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Posons $S_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}\displaystyle\sum_{k=1}^n \sqrt{k}$. On a :

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}}$$

Posons $f(x) = \sqrt{x}$ pour $x \in [0;1]$. Alors :

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

On reconnaît une somme de Riemann. La fonction f est continue sur $[0;1]$ (c'est une fonction de référence) donc d'après le cours, la suite (S_n) converge et :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{t}\mathrm{d}t$$

Or :

$$\int_0^1 \sqrt{t}\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

donc finalement :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{2}{3}.$$

3. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+k^3}$. On a :

$$\frac{k^2}{n^3+k^3} = \frac{n^2\times\frac{k^2}{n^2}}{n^3\left(1+\frac{k^3}{n^3}\right)} = \frac{1}{n}\times\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3}$$

Posons $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^3}$ pour $x \in [0;1]$. Alors :

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

On reconnaît une somme de Riemann. La fonction rationnelle f est définie et continue sur $[0;1]$ car $1+x^3 \neq 0$ si $x \in [0;1]$ donc d'après le cours, la suite (S_n) converge et :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^3}\mathrm{d}t$$

Or :

$$\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^3}\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{3}\ln|1+t^3|\right]_0^1 = \frac{1}{3}\ln(2)$$

donc finalement :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{3}\ln(2).$$

4. Non corrigé

5. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n(n+k)}}$. On a :

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+k)}} = \frac{1}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{k}{n}\right)}} = \frac{1}{n}\times\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}$$

Posons $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ pour $x \in [0;1]$. Alors :

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

On reconnaît une somme de Riemann. La fonction f est continue sur $[0;1]$ (car $1+x>0$ sur $[0;1]$) donc d'après le cours, la suite (S_n) converge et :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t}}\mathrm{d}t$$

Or :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t}}\mathrm{d}t = \left[2\sqrt{1+t}\right]_0^1 = 2\sqrt{2}-2$$

donc finalement :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = 2\sqrt{2}-2.$$

13 Exercice 14

Pour tout $x > 0$, on pose $\varphi(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\mathrm{d}t$.

1. La fonction φ est du type $\varphi(x) = \displaystyle\int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t$ avec $x_0 = 1$ et $f(t) = \dfrac{\mathrm{e}^t}{t}$. Pour montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, appliquons la Proposition 16.16 du cours. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Ainsi la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On a pour $x \in \mathbb{R}_+^*$:
$$\varphi'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x}.$$
Or pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} > 0$, ainsi $\varphi'(x) > 0$ et la fonction φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
On remarque que φ' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions dérivables avec le dénominateur qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$. On peut alors calculer φ'' pour étudier la convexité de φ. On a pour $x \in \mathbb{R}_+^*$:
$$\varphi''(x) = \frac{\mathrm{e}^x \times x - \mathrm{e}^x \times 1}{x^2} = \frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}.$$
Etudions alors le signe de φ''. On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2} > 0$ donc le signe de φ'' dépend du signe de $x-1$. On a alors :
$$\varphi''(x) > 0 \iff x - 1 > 0 \iff x > 1.$$
Ainsi φ est concave sur $]0;1]$ et convexe sur $[1;+\infty[$. De plus, $\varphi''(1) = 0$ et φ'' change de signe en 1 donc 1 est un point d'inflexion de φ.
2. On a les équivalences suivantes :
$$t > 0 \iff \mathrm{e}^t > \mathrm{e}^0 \iff \frac{\mathrm{e}^t}{t} > \frac{1}{t} \quad \text{car } t > 0.$$
On a en particulier, pour $t > 0$, $\dfrac{\mathrm{e}^t}{t} \geqslant \dfrac{1}{t}$.
Par croissance de l'intégrale, on en déduit que pour $x \leqslant 1$: (on doit prendre $x \leqslant 1$ car après on le fait tendre vers 0^+)
$$\int_x^1 \frac{\mathrm{e}^t}{t}\mathrm{d}t \geqslant \int_x^1 \frac{1}{t}\mathrm{d}t,$$
c'est-à-dire
$$-\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\mathrm{d}t \geqslant -\int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t$$
donc
$$\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\mathrm{d}t \leqslant \int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t$$
Or $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t = [\ln(t)]_1^x = \ln(x) - \ln(1) = \ln(x)$. Ainsi pour $x \leqslant 1$, on a :
$$\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\mathrm{d}t \leqslant \ln(x).$$
Or $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ donc par croissance comparée, on obtient :
$$\lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = -\infty.$$
3. Montrer l'inégalité $\mathrm{e}^t \geqslant \dfrac{t^2}{2}$ revient à montrer que $\mathrm{e}^t - \dfrac{t^2}{2} \geqslant 0$. Posons $f(t) = \mathrm{e}^t - \dfrac{t^2}{2}$ et montrons que $f(t) \geqslant 0$ pour $t > 0$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a :
$$f'(t) = \mathrm{e}^t - t.$$
Or, (astuce !), la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$ donc elle est au-dessus de ses tangentes en tout point. En particulier, elle est au-dessus de sa tangente en 0. Or sa tangente en 0 a pour équation $y = \mathrm{e}^0(t-0) + \mathrm{e}^0 = t + 1$. Ainsi

pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^t \geqslant t+1$, en particulier $\mathrm{e}^t - t \geqslant 1 > 0$. Ainsi $f'(t) > 0$ et la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, or $f(0) = 1$ donc pour tout $t > 0$, $f(t) > 0$. Soit pour $t > 0$,

$$\mathrm{e}^t \geqslant \frac{t^2}{2}.$$

On en déduit donc que pour $t > 0$,

$$\frac{\mathrm{e}^t}{t} \geqslant \frac{t}{2}.$$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que pour $x \geqslant 1$: (on doit prendre $x \geqslant 1$ car après on le fait tendre vers $+\infty$)

$$\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\mathrm{d}t \geqslant \int_1^x \frac{t}{2}\mathrm{d}t$$

or $\displaystyle\int_1^x \frac{t}{2}\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{4}\right]_1^x = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}$. Ainsi pour $x \geqslant 1$,

$$\varphi(x) \geqslant \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}.$$

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4} = +\infty$, on en déduit par croissance comparée que

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty.$$

De l'inégalité pour $x \geqslant 1$, $\varphi(x) \geqslant \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{1}{4}$, on en déduit que pour $x \geqslant 1$:

$$\frac{\varphi(x)}{x} \geqslant \frac{x}{4} - \frac{1}{4x}.$$

Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{4} - \frac{1}{4x} = +\infty$ donc par croissance comparée :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = +\infty.$$

On en déduit que la courbe $\mathcal{C}_\varphi$ de φ possède une branche parabolique de direction $0y$ au voisinage de $+\infty$.

4. Allure de la courbe représentative de φ.