Intégration sur un segment

Exercice 1 (♣)

Pour chacune des fonctions suivantes, donner une primitive et indiquer un intervalle sur lequel votre réponse est valide :

1. $f_1(x) = x^2 - 3x + 7$
2. $f_2(x) = \dfrac{x^4+1}{x^2}$
3. $f_3(x) = (7x+1)^8$
4. $f_4(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^4}$
5. $f_5(x) = \dfrac{1}{x}\left(\ln(x)\right)^2$
6. $f_6(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}$
7. $f_7(x) = (x+1)\mathrm{e}^{x^2+2x}$
8. $f_8(t) = \cos(t)\sin(t)$
9. $f_9(t) = \cos^3(t)$
10. $f_{10}(t) = \dfrac{1}{t\ln(t)}$

Exercice 2 (♣)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-2x-3}$.

1. On note α et β les deux racines de la fonction polynôme $P : x \mapsto x^2 - 2x - 3$. Déterminer α et β.
2. Montrer qu'il existe des réels a et b tels que :
$$\forall x \in \mathcal{D}_f\,, \qquad f(x) = \frac{a}{x-\alpha} + \frac{b}{x-\beta}\,.$$
3. En déduire une primitive de f sur tout intervalle inclus dans son domaine de définition.

Exercice 3 (♣)

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \displaystyle\int_{-2}^{3} (x^3+x-2)\mathrm{d}x$
2. $I_2 = \displaystyle\int_{3}^{11} \sqrt{2x+3}\,\mathrm{d}x$
3. $I_3 = \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{t^4}{\sqrt{t^5+3}}\mathrm{d}t$
4. $I_4 = \displaystyle\int_{1}^{2} \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$
5. $I_5 = \displaystyle\int_{0}^{2} \frac{2x-1}{x^2-x+1}\mathrm{d}x$
6. $I_6 = \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\mathrm{d}x$
7. $I_7 = \displaystyle\int_{0}^{2} \frac{x}{\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}}\mathrm{d}x$

Exercice 4 (♣)

Calculer les intégrales suivantes en utilisant une intégration par parties :

1. $I_1 = \displaystyle\int_{0}^{1} te^{2t}\mathrm{d}t$
2. $I_2 = \displaystyle\int_{1}^{2} t\ln(t)\mathrm{d}t$
3. $I_3 = \displaystyle\int_{0}^{1} (x^2+1)e^{3x}\mathrm{d}x$
4. $I_4 = \displaystyle\int_{1}^{2} \frac{\ln(1+t)}{t^2}\mathrm{d}t$
5. $I_5 = \displaystyle\int_{0}^{1} t\arctan(t)\mathrm{d}t$

Exercice 5 (♣)

Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué :

1. $I_1 = \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$
   en posant $t = x+1$
2. $I_2 = \displaystyle\int_{1}^{4/3} \frac{x^2}{(3x-2)^5}\mathrm{d}x$
   en posant $t = 3x-2$
3. $I_3 = \displaystyle\int_{1}^{2} \frac{e^{2x}}{1-e^x}\mathrm{d}x$ en posant $t = e^x$
4. $I_4 = \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{e^x+1}\mathrm{d}x$ en posant $t = e^x$
5. $I_5 = \displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$ en posant $t = \sin(u)$

Exercice 6 (♦)

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_{14} = \displaystyle\int_{0}^{5} t\left|t^2-1\right|\mathrm{d}t$
2. $I_{15} = \displaystyle\int_{0}^{2} \left|x^3-x^2+x-1\right|\mathrm{d}x$
3. $I_{16} = \displaystyle\int_{0}^{5} \frac{t-1}{|t^2-2t|+1}\mathrm{d}t$

Exercice 7 (♥)

L'objectif est de calculer les intégrales

$$I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2}}, \quad J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\mathrm{d}x$$

$$K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\mathrm{d}x.$$

1. **Calcul de I.** Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par :
$$f(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)\,.$$

(a) Calculer la dérivée de f.

(b) En déduire la valeur de I.

2. **Calcul de J et K.**

(a) Sans calculer explicitement les intégrales J et K, vérifier que $J+2I=K$.

(b) À l'aide d'une intégration par parties portant sur K, montrer que $K=\sqrt{3}-J$.

(c) En déduire les valeurs de J et K.

Exercice 8 (♦)

Soit $a>0$. Démontrer que :

$$\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = 0\,,$$

à l'aide du changement de variable $t=\frac{1}{x}$.

Exercice 9 (♥)

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $I_n=\displaystyle\int_1^e (\ln(x))^n\,\mathrm{d}x$.

1. Justifier l'existence de I_n.
2. Calculer I_0 et I_1.
3. Étudier la monotonie de la suite I_n et montrer qu'elle converge. Soit ℓ sa limite.
4. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}\,,\qquad I_{n+1}=e-(n+1)I_n$.
5. En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 10 (♠)

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose : $I_n=\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\mathrm{d}x$.

1. À l'aide d'un encadrement judicieux de I_n, déterminer la limite de la suite (I_n).
2. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\mathrm{d}x=1$.
3. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $J_n=nI_n$.

(a) Montrer que $J_n=\ln(2)-\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)\mathrm{d}x$. (penser à une intégration par parties)

(b) Montrer que :

$$\forall t\geq 0\,,\qquad 0\leq \ln(1+t)\leq t\,.$$

(c) En déduire la limite de la suite (J_n).

Exercice 11 (♠)

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on considère les intégrales :

$$I_n=\int_0^1 x^n\ln(1+x^2)\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad J_n=\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x\,.$$

1. (a) Calculer J_1.

(b) Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\,,\qquad 0\leq J_n\leq \frac{1}{n+1}\,.$$

(c) Étudier la convergence de la suite $(J_n)_{n\geq 1}$.

2. (a) En intégrant par parties, montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\,,\qquad I_n=\frac{\ln(2)}{n+1}-\frac{2}{n+1}J_{n+2}\,.$$

(b) Étudier la convergence de la suite $(I_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 12 (♠)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n\in\mathbb{N}$ avec $n\geq 2$, $u_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[n]{\sin(x)}\mathrm{d}x$.

1. Etudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire qu'elle converge.
2. Démontrer que : $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{2x}{\pi}\leq \sin(x)\leq x$.
3. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 13 (♦)

1. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}k^3$.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$.
3. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+k^3}$.
4. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n^2-k^2}$.
5. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n(n+k)}}$.

Exercice 14 (♠)

Pour tout $x>0$, on pose $\varphi(x)=\displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Donner son sens de variation, étudier sa convexité et déterminer ses points d'inflexion.
2. Montrer que pour tout $t>0$, on a $\dfrac{e^t}{t}\geq\dfrac{1}{t}$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\varphi(x)$.
3. Montrer que pour tout $t>0$, on a $e^t\geq\dfrac{t^2}{2}$. En déduire la limite et la branche infinie de φ en $+\infty$.
4. Tracer une allure de la courbe représentative de φ.

♣ Du trèfle à brouter...
♥ À connaître par coeur.
♠ Qui s'y frotte s'y pique !
♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau !