# Correction des exercices du TD 14

## Table des matières

# 1 Exercice 3

Les boules sont indiscernables au toucher donc on peut légitimement supposer qu'on se trouve dans une situation d'équiprobabilité. Piocher simultanément 3 boules dans l'urne revient à piocher trois fois successivement 1 boule dans l'urne **sans** remise.

1. On a : $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$.
2. Déterminer la loi de probabilité de $X$ signifie calculer $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$ et $P(X = 3)$.
   Notons $N_i$ l'événement : « obtenir une boule noire au $i$-ème tirage » et $B_i$ l'événement : « obtenir une boule blanche au $i$-ème tirage ».

   - $(X = 0)$ correspond à l'événement : « n'avoir aucune boule blanche ». Cela veut donc dire n'avoir que des boules noires aux trois tirages et donc
     $$(X = 0) = N_1 \cap N_2 \cap N_3.$$
     Ainsi d'après la formule des probabilités composées :
     $$P(X = 0) = P(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = P(N_1)P_{N_1}(N_2)P_{N_1 \cap N_2}(N_3) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{5}{3 \times 2 \times 7} = \frac{5}{42}.$$
   - $(X = 1)$ correspond à l'événement : « avoir une boule blanche et deux boules noires ». Il se réalise dans trois situations : si on pioche une blanche et deux noires ou bien une noire, une blanche, une noire ou bien deux noires et une blanche. Cela s'écrit donc :
     $$(X = 1) = (B_1 \cap N_2 \cap N_3) \cup (N_1 \cap B_2 \cap N_3) \cup (N_1 \cap N_2 \cap B_3).$$
     On a alors :
     $$\begin{aligned} P(X = 1) &= P((B_1 \cap N_2 \cap N_3) \cup (N_1 \cap B_2 \cap N_3) \cup (N_1 \cap N_2 \cap B_3)) \\ &= P(B_1 \cap N_2 \cap N_3) + P(N_1 \cap B_2 \cap N_3) + P(N_1 \cap N_2 \cap B_3) \quad \text{car les événements sont incompatibles} \\ &= P(B_1)P_{B_1}(N_2)P_{B_1 \cap N_2}(N_3) + P(N_1)P_{N_1}(B_2)P_{N_1 \cap B_2}(N_3) + P(N_1)P_{N_1}(N_2)P_{N_1 \cap N_2}(B_3) \\ &\phantom{=} \text{d'après la formule des probabilités composées} \\ &= \frac{4}{9} \times \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} + \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{4}{7} + \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{4}{7} \\ &= 3 \times \frac{4}{9} \times \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} \\ &= \frac{5 \times 4}{3 \times 2 \times 7} = \frac{20}{42} = \frac{10}{21}. \end{aligned}$$
   - $(X = 2)$ correspond à l'événement : « avoir deux boules blanches et une boule noire ». Il se réalise dans trois situations : si on pioche une noire et deux blanches ou bien une blanche, une noire, une blanche ou bien deux blanches et une noire. Cela s'écrit donc :
     $$(X = 2) = (N_1 \cap B_2 \cap B_3) \cup (B_1 \cap N_2 \cap B_3) \cup (B_1 \cap B_2 \cap N_3).$$
     On a alors :
     $$\begin{aligned} P(X = 2) &= P((N_1 \cap B_2 \cap B_3) \cup (B_1 \cap N_2 \cap B_3) \cup (B_1 \cap B_2 \cap N_3)) \\ &= P(N_1 \cap B_2 \cap B_3) + P(B_1 \cap N_2 \cap B_3) + P(B_1 \cap B_2 \cap N_3) \quad \text{car les événements sont incompatibles} \\ &= P(N_1)P_{N_1}(B_2)P_{N_1 \cap B_2}(B_3) + P(B_1)P_{B_1}(N_2)P_{B_1 \cap N_2}(B_3) + P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_1 \cap B_2}(N_3) \\ &\phantom{=} \text{d'après la formule des probabilités composées} \\ &= \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{4}{9} \times \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} \\ &= \frac{15}{42} = \frac{5}{14}. \end{aligned}$$
   - $(X = 3)$ correspond à l'événement : « n'avoir que des boules blanches » et donc
     $$(X = 3) = B_1 \cap B_2 \cap B_3.$$
     Ainsi d'après la formule des probabilités composées :
     $$P(X = 3) = P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_1 \cap B_2}(B_3) = \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{2}{42} = \frac{1}{21}.$$

   Ainsi, la loi de probabilité de $X$ est donnée par le tableau :

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=k)$ | $\frac{5}{42}$ | $\frac{10}{21}$ | $\frac{5}{14}$ | $\frac{1}{21}$ |

**Remarque :** on vérifie que $\displaystyle\sum_{i=0}^{3} P(X=i) = \frac{5}{42} + \frac{10}{21} + \frac{5}{14} + \frac{1}{21} = 1.$

3. D'après le cours, $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{3} kP(X=k)$ donc

$$\mathbb{E}(X) = 0 \times \frac{5}{42} + 1 \times \frac{10}{21} + 2 \times \frac{5}{14} + 3 \times \frac{1}{21} = \frac{4}{3}.$$

On rappelle que l'écart-type est la racine carrée de la variance : $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.
D'après la formule de König-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

et d'après le théorème de transfert, on a

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{3} k^2 P(X=k)$$

donc

$$\mathbb{V}(X) = 0^2 \times \frac{5}{42} + 1^2 \times \frac{10}{21} + 2^2 \times \frac{5}{14} + 3^2 \times \frac{1}{21} - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

Ainsi $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

# 2 Exercice 4

Parmi les deux pièces tirées, soit 0, 1 ou 2 pièces sont défectueuses donc $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.
Pour déterminer la loi de $X$, il faut ensuite calculer $P(X=0)$, $P(X=1)$ et $P(X=2)$. On a :

- L'événement $(X=0)$ correspond à tirer deux pièces non défectueuses. On peut voir ça comme tirer deux fois successivement une pièce **sans remise.** On note $D_i$ l'événement : « la pièce tirée au $i$-ème tirage est défectueuse. » On a alors :

$$(X=0) = \overline{D_1} \cap \overline{D_2}.$$

Ainsi d'après la formule des probabilités composées :

$$P(X=0) = P(\overline{D_1})P_{\overline{D_1}}(\overline{D_2}) = \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{21}{45}.$$

- L'événement $(X=1)$ correspond à tirer deux pièces dont une défectueuse. On a alors :

$$(X=1) = (\overline{D_1} \cap D_2) \cup (D_1 \cap \overline{D_2}).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
P(X=1) &= P((\overline{D_1} \cap D_2) \cup (D_1 \cap \overline{D_2}) \\
&= P(\overline{D_1} \cap D_2) + P(D_1 \cap \overline{D_2}) \quad \text{car les événements sont incompatibles} \\
&= P(\overline{D_1})P_{\overline{D_1}}(D_2) + P(D_1)P_{D_1}(\overline{D_2}) \\
&= \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} + \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} \\
&= \frac{21}{90} + \frac{21}{90} = \frac{42}{90} = \frac{21}{45}.
\end{aligned}$$

- L'événement $(X=2)$ correspond à tirer deux pièces défectueuses. On a alors :

$$(X=2) = D_1 \cap D_2.$$

Ainsi d'après la formule des probabilités composées :

$$P(X=2) = P(D_1)P_{D_1}(D_2) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{6}{90} = \frac{3}{45}.$$

Ainsi, la loi de probabilité de $X$ est donnée par le tableau :

| $k$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P(X=k)$ | $\frac{21}{45}$ | $\frac{21}{45}$ | $\frac{3}{45}$ |

D'après le cours, son espérance est donnée par :

$$\mathbb{E}(X) = 0 \times \frac{21}{45} + 1 \times \frac{21}{45} + 2 \times \frac{3}{45} = \frac{27}{45} = \frac{3}{5}.$$

D'après le théorème de König-Huygens, on a :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

D'après le théorème de transfert, on a :

$$\mathbb{E}(X^2) = 0^2 \times \frac{21}{45} + 1^2 \times \frac{21}{45} + 2^2 \times \frac{3}{45} = \frac{33}{45}.$$

Ainsi :

$$\mathbb{V}(X) = \frac{33}{45} - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{33}{45} - \frac{9}{25} = \frac{28}{75}.$$

# 3 Exercice 5

1. Pour définir une loi de probabilité, il faut que $\lambda k^2 \geqslant 0$, on cherche donc $\lambda \in \mathbb{R}_+$. De plus, il faut $\sum_{k=1}^{n} P(X=k) = 1$, on cherche $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \lambda k^2 = 1$.

   Or
$$\sum_{k=1}^{n} \lambda k^2 = \lambda \sum_{k=1}^{n} k^2 = \lambda \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
   On pose donc
$$\lambda = \frac{6}{n(n+1)(2n+1)}.$$
   On remarque qu'avec un tel $\lambda$, la condition $\lambda \in \mathbb{R}_+$ est bien vérifiée.

2. Posons $Y = \frac{1}{X}$. $Y$ est une variable aléatoire finie donc son espérance existe, d'après le théorème de transfert, on a :

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} P(X=k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \times \lambda k^2 \\
&= \lambda \sum_{k=1}^{n} k \\
&= \lambda \times \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{6}{n(n+1)(2n+1)} \times \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{3}{2n+1}
\end{aligned}$$

$Y$ est une variable aléatoire finie donc sa variance existe. Pour la calculer, utilisons la formule de König-Huygens. On doit donc d'abord calculer $E(Y^2)$ et pour cela, on utilise une nouvelle fois le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
E(Y^2) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} P(X=k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \times \lambda k^2 \\
&= \lambda \sum_{k=1}^{n} 1 \\
&= n\lambda \\
&= \frac{6}{(n+1)(2n+1)}
\end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
V(X) &= \frac{6}{(n+1)(2n+1)} - \left(\frac{3}{2n+1}\right)^2 \\
&= \frac{6}{(n+1)(2n+1)} - \frac{9}{(2n+1)^2} \\
&= \frac{6(2n+1) - 9(n+1)}{(n+1)(2n+1)^2} \\
&= \frac{12n+6-9n-9}{(n+1)(2n+1)^2} \\
&= \frac{3n-3}{(n+1)(2n+1)^2} \\
&= \frac{3(n-1)}{(n+1)(2n+1)^2}
\end{aligned}$$

# 4 Exercice 8

Notons $X$ la variable aléatoire égale au numéro indiqué sur le dé n° 1. Notons $Y$ la variable aléatoire égale au numéro indiqué sur le dé n° 2. Alors on a $Z = |X - Y|$.

Réalisons un tableau à double entrée dans lequel figure à l'intersection de la ligne $i \in [\![1;6]\!]$ et de la colonne $j \in [\![1;6]\!]$ le nombre $|i-j|$.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 |
| 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |

A la vue du tableau, il est clair que $Z(\Omega) = [\![0;5]\!]$. Il est également facile de calculer la loi de $Z$ à l'aide du tableau.

Par exemple, pour $P(Z=0)$, on compte le nombre de 0 et on divise par le nombre de cases : $P(Z=0) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

D'où la loi de $Z$, donnée par le tableau suivant :

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(Z=k)$ | $\frac{3}{18}$ | $\frac{5}{18}$ | $\frac{4}{18}$ | $\frac{3}{18}$ | $\frac{2}{18}$ | $\frac{1}{18}$ |

A l'aide du tableau de la loi de $Z$, on calcule sa fonction de répartition $F_Z$ :

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \dfrac{3}{18} \text{ si } 0 \leqslant x < 1 \\ \dfrac{8}{18} \text{ si } 1 \leqslant x < 2 \\ \dfrac{12}{18} \text{ si } 2 \leqslant x < 3 \\ \dfrac{15}{18} \text{ si } 3 \leqslant x < 4 \\ \dfrac{17}{18} \text{ si } 4 \leqslant x < 5 \\ 1 \text{ si } x \geqslant 5 \end{cases}$$

On calcule facilement son espérance à l'aide du tableau de sa loi :

$$\mathbb{E}(X) = 0 \times \frac{3}{18} + 1 \times \frac{5}{18} + 2 \times \frac{4}{18} + 3 \times \frac{3}{18} + 4 \times \frac{2}{18} + 5 \times \frac{1}{18} = \frac{35}{18}.$$

D'après le théorème de König-Huygens, on a :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X^2).$$

On calcule $\mathbb{E}(X^2)$ à l'aide du théorème de transfert et on obtient :

$$\mathbb{E}(X^2) = 1^2 \times \frac{5}{18} + 2^2 \times \frac{4}{18} + 3^2 \times \frac{3}{18} + 4^2 \times \frac{2}{18} + 5^2 \times \frac{1}{18} = \frac{105}{18}.$$

Ainsi

$$\mathbb{V}(X) = \frac{105}{18} - \left(\frac{35}{18}\right)^2 = \frac{665}{324}.$$

# 5 Exercice 9

Dans cette expérience à deux issues (bonne ou mauvaise réponse), on appelle succès l'événement « avoir trouvé la bonne réponse à la question ». A chaque question, la probabilité de succèes est $p = \dfrac{1}{3}$ car une seule des trois réponses proposées est correcte.
On répète $n = 21$ fois cette expérience de manière indépendante. La variable aléatoire $X$ qui compte le nombre de succès suit une loi binomiale de paramètres $(n, p)$. On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(21; \dfrac{1}{3})$.
On a alors :

$$\mathbb{E}(X) = np = \frac{21}{3} = 7 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = np(1-p) = 7 \times \frac{2}{3} = \frac{14}{3}.$$

# 6 Exercice 11

1. Pour que $X$ soit une variable aléatoire, il faut que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P(X = k) \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X = K) = 1$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} P(X = K) &= \sum_{k=0}^{n} \ln(a^k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} k \ln(a) \\ &= \ln(a) \sum_{k=0}^{n} k \\ &= \frac{n(n+1)\ln(a)}{2} \end{aligned}$$

On doit donc choisir $a$ tel que :

$$\frac{n(n+1)\ln(a)}{2} = 1$$

i.e.

$$\ln(a) = \frac{2}{n(n+1)}$$

i.e.

$$a = \exp\left(\frac{2}{n(n+1)}\right).$$

De plus, $a = \exp\left(\frac{2}{n(n+1)}\right) > 1$ car $\frac{2}{n(n+1)} > 0$ et donc $\ln(a) > 0$. Ainsi avec $a = \exp\left(\frac{2}{n(n+1)}\right)$, la variable $X$ est bien une variable aléatoire.

2. La variable aléatoire $X$ est finie donc son espérance existe, on a :

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k\ln(a^k) \\
&= \ln(a)\sum_{k=0}^{n} k^2 \\
&= \ln(a) \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{2}{n(n+1)} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{2n+1}{3}
\end{aligned}$$

En conclusion, $E(X) = \frac{2n+1}{3}$.

3. La variable aléatoire $X$ est finie donc sa variance existe. D'après la formule de König-Huygens, on a :

$$V(X) = E(X^2) - E(X).$$

Calculons donc $E(X^2)$ à l'aide du théorème de transfert, on a :

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=0}^{n} k^2P(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k^2\ln(a^k) \\
&= \ln(a)\sum_{k=0}^{n} k^3 \\
&= \ln(a) \times \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \\
&= \frac{2}{n(n+1)} \times \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \\
&= \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

On a donc $E(X^2) = \frac{n(n+1)}{2}$, ainsi :

$$V(X) = \frac{n(n+1)}{2} - \left(\frac{2n+1}{3}\right)^2 = \frac{9n(n+1) - 2(2n+1)^2}{18} = \frac{n^2+n-2}{18}.$$

# 7 Exercice 13

Pour commencer, on détermine le support de $X$, on a : $X(\Omega) = [\![1;52]\!]$. Il y a (au moins) deux méthodes pour déterminer la loi de $X$.

**Méthode 1 :** On remarque que la probabilité d'avoir découvert $k$ cartes pour obtenir le roi de trèfle correspond à $P(X = k)$. C'est aussi la probabilité que la $k$-ème carte retournée soit un roi de trèfle. Or il y a un seul roi de trèfle parmi les 52 cartes donc

$$P(X = k) = \frac{1}{52}.$$

On reconnaît alors une loi uniforme sur $[\![1;52]\!]$.

**Méthode 2 :** Soit $k \in [\![1;52]\!]$, on a :

$$P(X = k) = \frac{51}{52} \times \frac{50}{51} \times \frac{49}{50} \times \ldots \times \frac{51-(k-2)}{52-(k-2)} \times \frac{1}{52-(k-1)}.$$

- Terme rouge : Probabilité que la première carte retournée ne soit pas le roi de trèfle : 51 possibilités sur 52.
- Terme bleu : Probabilité que la deuxième carte retournée ne soit pas le roi de trèfle : 50 possibilités sur 51 (car on a déjà retourné une carte).
- Terme orange : Probabilité que la troisième carte retournée ne soit pas le roi de trèfle : 49 possibilités sur 50 (car on a déjà retourné deux cartes).
- Terme vert : Probabilité que la $k-1$-ème carte retournée ne soit pas le roi de trèfle : 51-$(k-2)$ possibilités sur 52-$(k-2)$ (car on a déjà retourné $k-2$ cartes).
- Terme violet : Probabilité que la $k$-ème carte retournée soit le roi de trèfle : 1 possibilité sur $52-(k-1)$ cartes (car on a déjà retourné $k-1$ cartes).

On reconnaît un produit télescopique, il reste alors :

$$P(X = k) = \frac{1}{52}.$$

On reconnaît alors une loi uniforme sur $[\![1;52]\!]$.

On a ensuite :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1+52}{2} = \frac{53}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{52^2-1}{12} = \frac{901}{4}.$$

**Attention !** Ne pas tomber dans le piège de dire que $X$ suit une loi géométrique. En effet, c'est faux entre autre car le support de $X$ est fini et non infini !

# 8 Exercice 14

1. (a) On a $X(\Omega) = \{-0,5; 0,5; 1,5\}$. Déterminons la loi de $X$ :
   - On cherche $P(X = 1,5)$. Notre gain est de 1,5 euros lorsqu'on obtient un double 1. On a alors :
   $$P(X = 1,5) = \frac{1}{36}.$$
   - On cherche $P(X = 0,5)$. Notre gain est de 0,5 euro lorsqu'on obtient un double autre que 1. Il y a 5 doubles possibles. On a alors :
   $$P(X = 0,5) = \frac{5}{36}.$$
   - On cherche $P(X = -0,5)$. Notre gain est de -0,5 euro lorsqu'on n'obtient aucun double. On a donc 6 choix pour le résultat du premier dé mais seulement 5 pour le résultat du deuxième dé. On a alors :
   $$P(X = -0,5) = \frac{6 \times 5}{36} = \frac{30}{36}$$

   Ce que l'on peut résumer dans le tableau suivant :

   | $x$ | $-0,5$ | $0,5$ | $1,5$ | Total |
   |---|---|---|---|---|
   | $P(X = x)$ | $\frac{30}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | 1 |

   (b) Le support de $X$ est fini donc elle admet une espérance, on a :
   $$\mathbb{E}(X) = -0,5 \times \frac{30}{36} + 0,5 \times \frac{5}{36} + 1,5 \times \frac{1}{36} = -\frac{30}{72} + \frac{5}{72} + \frac{3}{72} = -\frac{22}{72} = -\frac{11}{36}$$
   En moyenne, on perd donc 0,30 euro.
2. Traité en cours.

# 9 Exercice 15

1. Lors de cette expérience à deux issues : faire une chute ou pas lors d'une balade, on appelle succès l'événement « faire une chute au cours de la balade » de probabilité $p$.
   On répète $n$ fois cette expérience de manière indépendante.
   La variable aléatoire $X$ qui compte le nombre de succès suit une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$. On a $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.
   Ainsi la probabilité qu'il ait fait $k$ chutes au cours de $n$ balades est égale à $P(X=k)$. On a :
$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$
2. Le cavalier est automatiquement blessé si il fait $r$ chutes ou plus, ainsi la probabilité qu'il ne soit pas blessé après ces $n$ balades est égale à $P(X<r)$. On a :
$$P(X<r) = P(X \leqslant r-1) = \sum_{k=0}^{r-1} P(X=k) = \sum_{k=0}^{r-1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

# 10 Exercice 18

1. D'une part, la variable aléatoire $X$ est finie donc son espérance existe, on a :
$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} kP(X=k).$$
   Calculons d'autre part $\sum_{k=1}^{n} P(X \geqslant k)$. Comme $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$, on a :
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} P(X \geqslant k) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n} P(X=j)\\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j} P(X=j) \quad \text{en échangeant l'ordre de sommation}\\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(P(X=j)\left(\sum_{k=1}^{j} 1\right)\right)\\ &= \sum_{j=1}^{n} jP(X=j)\\ &= E(X)\end{aligned}$$
   On a donc bien montré l'égalité :
$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} P(X \geqslant k).$$
   (a) Comme les coupons sont numérotés de $1$ à $n$, le plus petit numéro peut être 1 et le plus grand $n$, ainsi $X_N(\Omega) = [\![1,n]\!]$. Il nous reste à déterminer $P(X_N = k)$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.

   Nous allons utiliser une astuce classique et calculer d'abord $P(X_N \leqslant k)$ pour $k \in [\![1,n]\!]$. En effet, une fois ce terme calculé, on pourra en déduire $P(X_N = k)$.

   Introduisons des variables aléatoires intermédiaires pour le besoin de l'exercice. Nous définissons pour $i \in [\![1,N]\!]$, la variable aléatoire $Y_i$ égale au numéro du coupon tiré dans l'urne numéro $i$. On a alors :
$$\begin{aligned}P(X_N \leqslant k) &= P\left(\bigcap_{i=1}^{N} (Y_i \leqslant k)\right)\\ &= \prod_{i=1}^{N} P(Y_i \leqslant k) \quad \text{car les tirages dans les urnes sont indépendants}\end{aligned}$$

Les coupons étant indiscernables au toucher, on est dans une situation d'équiprobabilité et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $Y_i \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, N]\!])$. Ainsi :

$$P(Y_i \leqslant k) = \sum_{j=1}^{k} P(Y_i = j) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$$

On a donc pour $k \in [\![1, N]\!]$ :

$$P(X_N \leqslant k) = \prod_{i=1}^{N} \frac{k}{N} = \left(\frac{k}{N}\right)^N.$$

Il nous reste plus qu'à remarquer que pour $k \in [\![1, N]\!]$ :

$$P(X_N = k) = P((X_N \leqslant k) \setminus (X_N \leqslant k-1))$$

or comme $(X_N \leqslant k-1) \subset (X_N \leqslant k)$, on a :

$$P((X_N \leqslant k) \setminus (X_N \leqslant k-1)) = P(X_N \leqslant k) - P(X_N \leqslant k-1).$$

Ainsi :

$$P(X_N = k) = \left(\frac{k}{N}\right)^N - \left(\frac{k-1}{N}\right)^N$$

Nous avons ainsi déterminé la loi de $X_N$.

(b) $X_N$ est une variable aléatoire finie donc elle admet une espérance. Nous allons utiliser l'expression démontrée à la question 1. pour la calculer. On a :

$$\begin{aligned}
E(X_N) &= \sum_{k=1}^{n} P(X_N \geqslant k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} 1 - P(X_N < k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} 1 - P(X_N \leqslant k-1) \\
&= \sum_{k=1}^{n} 1 - \left(\frac{k-1}{N}\right)^N \\
&= \sum_{k=1}^{n} 1 - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k-1}{N}\right)^N \\
&= n - \frac{1}{N^N} \sum_{k=1}^{n} (k-1)^N
\end{aligned}$$

On a donc :

$$E(X_N) = n - \frac{1}{N^N} \sum_{k=1}^{n} (k-1)^N.$$

Reste alors à calculer la limite de ce terme. Encadrons la partie droite de cette expression , on a :

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} (k-1)^N \leqslant \sum_{k=1}^{n} (n-1)^N = n(n-1)^N.$$

Ainsi :

$$0 \leqslant \frac{1}{N^N} \sum_{k=1}^{n} (k-1)^N \leqslant \frac{n(n-1)^N}{N^N}.$$

On a :

$$\frac{n(n-1)^N}{N^N} = n\left(\frac{n-1}{N}\right)^N = n \exp\left(N(\ln(n-1) - \ln(N))\right).$$

Or $\lim\limits_{N \to +\infty} \ln(n-1) - \ln(N) = -\infty$ donc par produit, $\lim\limits_{N \to +\infty} N(\ln(n-1) - \ln(N)) = -\infty$. Par composée de limites, on obtient que :

$$\lim_{N \to +\infty} \exp\left(N \ln(n-1) - \ln(N)\right) = 0.$$

On peut conclure à l'aide du théorème d'encadrement que :

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N^N}\sum_{k=1}^{n}(k-1)^N = 0$$

ainsi

$$\lim_{N\to+\infty} E(X_N) = n$$

Ce résultat est cohérent avec l'intuition car si on a un très très grand nombre d'urnes, on a de "grandes chances" qu'au moins une urne renvoie le coupon n° $n$ et que donc en moyenne $X_N$ vaille $n$.

# 11 Exercice 19

1. Soit $([X_k = 1], [X_k = 2], [X_k = 3], [X_k = 4])$ un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= P(X_{k+1} = 1) \\ &= P(X_k = 1)P_{[X_k=1]}(X_{k+1} = 1) + P(X_k = 2)P_{[X_k=2]}(X_{k+1} = 1) + P(X_k = 3)P_{[X_k=3]}(X_{k+1} = 1) + P(X_k = 4)P_{[X_k=4]} \\ &= a_k \times 0 + b_k \times \frac{1}{3} + c_k \times \frac{1}{3} + d_k \times 0 \\ &= \frac{1}{3}b_k + \frac{1}{3}c_k \end{aligned}$$

On montre avec la même méthode que :

$$b_{k+1} = \frac{1}{3}a_k + \frac{1}{3}c_k$$

et

$$c_{k+1} = \frac{1}{3}a_k + \frac{1}{3}b_k$$

et

$$d_{k+1} = \frac{1}{3}a_k + \frac{1}{3}b_k + \frac{1}{3}c_k + d_k$$

2. On a ainsi :

$$Y_{k+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}b_k + \frac{1}{3}c_k \\ \frac{1}{3}a_k + \frac{1}{3}c_k \\ \frac{1}{3}a_k + \frac{1}{3}b_k \\ \frac{1}{3}a_k + \frac{1}{3}b_k + \frac{1}{3}c_k + d_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \\ d_k \end{pmatrix}$$

$Y_{k+1} = AY_k$ avec $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Montrons le résultat par récurrence et posons pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(k)$ : « $Y_k = A^kY_0$ ».

   **Initialisation** $(n = 0)$ $A^0Y_0 = I_4Y_0 = Y_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   **Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie, montrons que $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.
   On a, d'après la question précédente, $Y_{k+1} = AY_k$ or par hypothèse de récurrence $Y_k = A^kY_0$ donc :

$$Y_{k+1} = A \times A^kY_0 = A^{k+1}Y_0.$$

   $\mathcal{P}(k + 1)$ est donc vraie et la propriété est héréditaire.

   **Conclusion** Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Y_k = A^kY_0$.

4. Pour déterminer la loi de la variable aléatoire $X_2$, calculons $Y_2$. On a :

$$Y_2 = A^2Y_0$$

or $A^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ et comme le pion est en $C_1$ initialement on a : $Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi :

$$Y_2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

on a donc :

$$P(X_2 = 1) = \frac{2}{9}, P(X_2 = 2) = \frac{1}{9}, P(X_2 = 3) = \frac{1}{9}, P(X_2 = 4) = \frac{5}{9}.$$

La variable aléatoire $X_2$ est finie donc elle admet une espérance et une variance, on a :

$$E(X_2) = 1 \times \frac{2}{9} + 2 \times \frac{1}{9} + 3 \times \frac{1}{9} + 4 \times \frac{5}{9} = \frac{2+2+3+20}{9} = \frac{27}{9}.$$

Pour calculer sa variance, commençons par calculer $E(X_2^2)$ à l'aide du théorème de transfert, on a :

$$E(X_2^2) = 1^2 \times \frac{2}{9} + 2^2 \times \frac{1}{9} + 3^2 \times \frac{1}{9} + 4^2 \times \frac{5}{9} = \frac{2+4+9+80}{9} = \frac{95}{9}.$$

Ainsi

$$V(X_2) = E(X_2^2) - E(X_2)^2 = \frac{95}{9} - \left(\frac{27}{9}\right)^2 = \frac{855-729}{81} = \frac{126}{81} = \frac{14}{9}$$

5. Comme $([X_k = 1], [X_k = 2], [X_k = 3], [X_k = 4])$ est un système complet d'événements, on a :

$$a_k + b_k + c_k + d_k = 1$$

ainsi $a_k + b_k + c_k = 1 - d_k$, on a donc :

$$d_{k+1} = \frac{1}{3}(1 - d_k) + d_k = \frac{2}{3}d_k - \frac{1}{3}.$$

On a pour $a_k$ :

$$\begin{aligned} a_{k+2} &= \frac{1}{3}b_{k+1} + \frac{1}{3}c_{k+1} \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}a_k + \frac{1}{3}c_k\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}a_k + \frac{1}{3}b_k\right) \\ &= \frac{2}{9}a_k + \frac{1}{9}(b_k + c_k) \\ &= \frac{2}{9}a_k + \frac{1}{3}a_{k+1} \end{aligned}$$

On a donc bien obtenu les relations demandées.
On reconnaît pour $d_k$ la relation de récurrence d'une suite arithmético-géométrique.
On applique la méthode du cours (il faudrait détailler) et on obtient :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad d_k = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

On reconnaît pour $a_k$ la relation de récurrence d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
On applique la méthode du cours avec $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$ (il faudrait détailler) et on obtient :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_k = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^k + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

Il reste à déterminer $b_k$ et $c_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} b_{k+2} &= \frac{1}{3}a_{k+1} + \frac{1}{3}c_{k+1} \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}b_k + \frac{1}{3}c_k\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}a_k + \frac{1}{3}b_k\right) \\ &= \frac{2}{9}b_k + \frac{1}{9}(c_k + a_k) \\ &= \frac{2}{9}b_k + \frac{1}{3}b_{k+1} \end{aligned}$$

La suite $(b_k)_k$ vérifie donc la même relation de récurrence que $a_k$, il existe donc de la même manière des réels $\lambda$ et $\mu$ tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad b_k = \lambda \left(-\frac{1}{3}\right)^k + \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

On a : $b_0 = 0$ et $b_1 = \frac{1}{3}a_0 + \frac{1}{3}c_0 = \frac{1}{3}$, on peut alors déterminer $\lambda$ et $\mu$ en résolvant le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \lambda & + & \mu & = & 0 \\ -\dfrac{\lambda}{3} & + & \dfrac{2\mu}{3} & = & \dfrac{1}{3} \end{array} \right.$$

On obtient $\lambda = -\frac{1}{3}$ et $\mu = \frac{1}{3}$. Ainsi :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad b_k = \frac{-1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^k + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k$$

Connaissant $a_k, b_k$ et $d_k$, on peut en déduire $c_k$ puisque $a_k + b_k + c_k + d_k = 1$, on a :

$$c_k = 1 - \left(\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^k + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k + \frac{-1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^k + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k + 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^k\right)$$

i.e.

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad c_k = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^k + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k$$

En résumé, on a bien déterminé la loi de $X_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On a, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$X_k(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} P(X_k = 1) = \dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^k + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^k \\ P(X_k = 2) = \dfrac{-1}{3}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^k + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^k \\ P(X_k = 3) = -\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^k + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^k \\ P(X_k = 4) = 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^k \end{array} \right.$$