Variables aléatoires finies

Exercice 1 (♣)

Une urne contient deux boules blanches et quatre boules noires. On tire les boules une à une et sans remise jusqu'à ce qu'il ne reste dans l'urne que des boules de la même couleur. Soit X la variable aléatoire associée au nombre de tirages nécessaires. Déterminer la loi de X.

Exercice 2 (♣)

On lance simultanément 2 dés, et on note X le plus grand des numéros. Déterminer la loi de X.

Exercice 3 (♣)

Une urne contient 4 boules blanches et 5 boules noires. Les boules sont indiscernables au toucher. On prend au hasard et simultanément trois boules de l'urne. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues lors du tirage.

1. Déterminer le support de X.
2. Donner la loi de probabilité de X.
3. Calculer l'espérance et l'écart-type de X.

Exercice 4 (♣)

Un lot de 10 pièces contient 3 pièces défectueuses. On tire simultanément et au hasard 2 pièces de ce lot. Soit X le nombre de pièces défectueuses parmi les pièces tirées.

Quelle est la loi de X ? Donner son espérance et sa variance.

Exercice 5 (♥)

Soient λ un réel strictement positif, en entier $n \geq 1$ et X une variable aléatoire dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, P(X = k) = \lambda k^2$$

1. Déterminer la valeur de λ.
2. Soit $Y = 1/X$. Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire Y.

Exercice 6 (♣)

Une urne contient n boules blanches et $2n$ boules rouges (avec $n \geq 3$).

1. On effectue des tirages dans l'urne avec remise jusqu'à obtenir une boule blanche ou 3 boules rouges successivement. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages. Déterminer la loi de X et l'espérance de X.
2. On effectue maintenant les tirages sans remise. Donner dans ce cas la loi et l'espérance de X.

Exercice 7 (♣)

Un forain dispose d'une roue divisée en huit secteurs égaux : trois blancs, un vert, et quatre rouges. Il invente le jeu suivant : le joueur lance la roue une première fois : s'il obtient le secteur vert, il gagne 11 euros ; s'il obtient un secteur blanc, il perd ; enfin, s'il obtient un secteur rouge, il lance la roue une seconde fois : s'il obtient alors le secteur vert, il gagne 8 euros, s'il obtient un secteur blanc, il gagne 6 euros et enfin s'il obtient à nouveau un secteur rouge, il perd définitivement.

Quel prix doit faire payer le forain pour que chaque partie lui rapporte en moyenne deux euros ?

Exercice 8 (♣)

On lance simultanément deux dés cubiques. On appelle Z la variable aléatoire égale à la valeur absolue de la différence des numéros obtenus. Déterminer la loi de Z, son espérance et sa variance.

Exercice 9 (♣)

Un candidat répond à un QCM comportant 21 questions. Pour chacune des questions posées, trois propositions de réponses sont faites et une seule d'entre elles est exacte. On note X la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses obtenues par la candidat qui répond à chaque question au hasard. Reconnaître la loi de X, en préciser ses paramètres, puis donner son espérance et sa variance.

Exercice 10 (♣)

L'oral d'un concours comporte 100 sujets. Chaque candidat en tire au sort deux et choisit celui qu'il souhaite traiter. Un candidat arrive en ayant révisé 60 des 100 sujets.

1. Quelle est la probabilité pour que le candidat ait révisé :
   (a) Les deux sujets ?
   (b) Exactement un ?
   (c) Aucun ?
2. Définir une variable aléatoire associée à ce problème dont on déterminera la loi de probabilité et l'espérance.

Exercice 11 (♥)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans $[\![0, n]\!]$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on suppose que $P(X = k) = \ln\left(a^k\right)$, où a est un réel strictement positif.

1. Déterminer a pour que X soit une variable aléatoire.
2. Calculer $E(X)$.
3. Calculer $V(X)$. **On rappelle que** $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Exercice 12 (♣)

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![-3, 3]\!])$ et $Y = X^2$. Déterminer la loi de Y ainsi que son espérance et sa variance.

Exercice 13 (♠)

Les 52 cartes d'un jeu sont alignées, face cachées, sur une table de façon aléatoire. On découvre les cartes, de gauche à droite jusqu'à obtenir le roi de trêfle et on note X la variable aléatoire égale au nombre de cartes découvertes. Reconnaître la loi de X puis donner son espérance et sa variance.

Exercice 14 (♣)

Pour jouer à ce jeu, on mise 0,50 euro. On lance deux dés non truqués. Si on obtient deux nombres 1, on reçoit 2 euros. Si on obtient deux nombres identiques autres que 1, on reçoit 1 euro et sinon on ne reçoit rien. X est la gain algébrique.

1. Déterminer la loi de X.
2. Justifier que X admet une espérance et calculer $E(X)$.

Exercice 15 (♣)

A chaque balade à cheval qu'il effectue, la probabilité que le cavalier soit désarçonné est égale à p.

1. Quelle est la probabilité qu'il ait fait k chutes au terme de n balades ?
2. Sachant que r chutes entraînent obligatoirement une blessure grave, quelle est la probabilité qu'il ne soit pas blessé après ces n balades ?

Exercice 16 (♠)

Une urne contient 2 boules blanches et $n-2$ boules rouges. On effectue des tirages sans remise de cette urne. On appelle X le rang de sortie de la première boule blanche, Y le nombre de boules rouges restantes à ce moment dans l'urne et Z le rang de sortie de la deuxième boule blanche.

1. Déterminer la loi de X et son espérance.
2. Exprimer Y en fonction de X et calculer $E(Y)$.
3. Trouver un lien entre Z et X et en déduire la loi de Z.

Exercice 17 (♦)

Une entreprise recrute un cadre, $n \in \mathbb{N}^*$ candidats se présentent. Chacun d'eux passe un test avec une probabilité de réussite $p(0<p<1)$ identique pour chacun. Le premier qui réussit ce test est engagé. On note X la variable aléatoire associée au numéro du candidat engagé, ou X prend la valeur $n+1$ si aucun des candidats ne réussit le test. On pose $q=1-p$.

1. Déterminer la loi de X.
2. Montrer que pour tout $x \neq 1$,
$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{-(n+1)x^n(1-x)+1-x^{n+1}}{(1-x)^2}.$$
3. Calculer $E(X)$ en fonction de q.
4. Pour quelles valeurs de p, l'entreprise a-t-elle plus d'une chance sur deux d'engager un candidat ?

Exercice 18 (♠)

Soit un entier $n \geq 1$.

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{1,\ldots,n\}$.
Montrer que $E(X)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(X \geq k)$.
2. On dispose de $N \in \mathbb{N}^*$ urnes contenant chacune n coupons numérotés de 1 à n. Dans chaque urne on tire au hasard un coupon. On note X_N la variable aléatoire égale au plus grand numéro tiré.
   (a) Calculer la loi de X_N.
   (b) Calculer $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} E(X_N)$.

Exercice 19 (♥)

Un pion est déplacé sur un échiquier à quatre cases C_1, C_2, C_3 et C_4. Il se déplace de l'une des cases vers l'une quelconque des 3 autres cases de manière équiprobable, sauf s'il se trouve en C_4, auquel cas il y reste (on peut considérer qu'il se déplace de C_4 en C_4). A l'instant initial, le pion est en C_1.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la case occupée par le pion à l'issue de son k-ième déplacement, avec $X_0=1$.

Soit $Y_k = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \\ d_k \end{pmatrix}$ avec $a_k = P(X_k=1), b_k = P(X_k=2)$, $c_k = P(X_k=3), d_k = P(X_k=4)$

1. Calculer $a_{k+1}, b_{k+1}, c_{k+1}, d_{k+1}$ en fonction de a_k, b_k, c_k, d_k. En déduire la matrice carrée A telle que $Y_{k+1} = AY_k$.
2. Justifier que, pour tout entier naturel $k, Y_k = A^k Y_0$.
3. En déduire la loi de la variable aléatoire X_2, son espérance et son écart-type.
4. Justifier les relations : pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$d_{k+1} = \frac{2}{3}d_k + \frac{1}{3}, \quad a_{k+2} = \frac{1}{3}a_{k+1} + \frac{2}{9}a_k$$
En déduire la loi de X_k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 20 (♦)

On considère une urne contenant a boules noires et b boules blanches. On effectue un tirage de n boules simultanément avec $n \leq a$ et $n \leq b$. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues.

1. Déterminer la loi de X.
2. Démontrer que
$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{a-1}{k}\binom{b}{n-1-k} = \binom{a+b-1}{n-1}$$
3. En déduire $E(X)$.

Exercice 21 (♦)

On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant chacune $2n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ boules numérotées de 1 à $2n$. On prélève au hasard n boules dans U_1 et n boules dans U_2. Soit V la variable aléatoire égale au nombre de numéros communs aux deux prélèvements. Déterminer la loi de V et son espérance.

On pourra utiliser à bon escient la formule de Vandermonde :

$$\forall (p,q,n) \in \mathbb{N}^3, \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}$$

♣ Du trèfle à brouter...
♥ À connaître par coeur.
♠ Qui s'y frotte s'y pique !
♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau !