Correction partielle du TD 13

Table des matières

1 Exercice 9

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions de référence dérivables sur $\mathbb{R}$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
$$f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1.$$
Pour $x > 0$, on a les équivalences suivantes :
$$f'(x) > 0 \iff \ln(x) > -1 \iff x > \mathrm{e}^{-1}$$
Ainsi la fonction f est décroissante sur $]0, \mathrm{e}^{-1}[$ et croissante sur $[\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$.
2. La fonction f est continue sur $[\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$ (car dérivable) et strictement croissante donc d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $[\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$ sur $f\left([\mathrm{e}^{-1}, +\infty[\right)$. Or on a :
$$f(e^{-1}) = e^{-1} \times (-1) = -\mathrm{e}^{-1} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$
Ainsi f réalise une bijection de $[\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$ sur $[-\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$.
3. On a $f'(x) = 0 \iff x = \mathrm{e}^{-1}$ ainsi f^{-1} est dérivable sur $]\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$.
4. D'après les formules de cours, on a :
$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))}$$
or $f(1) = 0$ et f est bijective sur $[\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$ donc $f^{-1}(0) = 1$. Ainsi on a :
$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{\ln(1) + 1} = 1$$
On a $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}$ donc $f^{-1}(\mathrm{e}) = \mathrm{e}$ et donc :
$$(f^{-1})'(\mathrm{e}) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\mathrm{e}))} = \frac{1}{f'(\mathrm{e})} = \frac{1}{\ln(\mathrm{e}) + 1} = \frac{1}{2}$$
On a $f(\mathrm{e}^2) = 2\mathrm{e}^2$ donc $f^{-1}(2\mathrm{e}^2) = \mathrm{e}^2$ et donc :
$$(f^{-1})'(2\mathrm{e}^2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(2\mathrm{e}^2))} = \frac{1}{f'(\mathrm{e}^2)} = \frac{1}{\ln(\mathrm{e}^2) + 1} = \frac{1}{3}$$

2 Exercice 10

1. Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto 1 + x$ sont continues sur $] - 1, +\infty[$ et $x \mapsto 1 + x$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. La fonction $\ln$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par composée puis somme, $x \mapsto x - \ln(1 + x)$ est continue sur $] - 1, +\infty[$. Ainsi par quotient $x \mapsto \dfrac{x - \ln(1 + x)}{x}$ est continue sur $] - 1, +\infty[\setminus\{0\}$.
Il reste donc à montrer que f est continue en 0. On pour $x \neq 0$,
$$f(x) = \frac{x - \ln(1 + x)}{x} = 1 - \frac{\ln(1 + x)}{x}.$$
Or on peut montrer en utilisant un taux d'accroissement que $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x} = 1$ (cf Exemple 13.5 du Chapitre 13). Ainsi
$$\lim_{x\to0} f(x) = 1 - 1 = 0 = f(0).$$
La fonction f est donc continue en 0 et on peut en conclure qu'elle est continue sur $] - 1, +\infty[$.
2. Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto 1 + x$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] - 1, +\infty[$ et $x \mapsto 1 + x$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. La fonction $\ln$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par composée puis somme, $x \mapsto x - \ln(1 + x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] - 1, +\infty[$.
Ainsi par quotient f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] - 1, +\infty[\setminus\{0\}$. Soit $x \in] - 1, +\infty[\setminus\{0\}$,
$$f'(x) = \frac{(1 - \frac{1}{1+x}) \times x - (x - \ln(1 + x)) \times 1}{x^2} = \frac{\frac{x^2}{x+1} - x + \ln(1 + x)}{x^2} = \frac{1}{x + 1} + \frac{\ln(1 + x) - x}{x^2}$$

3. On va appliquer le théorème de prolongement de la dérivée. En admettant la limite donnée par l'énoncé, on a :

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

De plus, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[\setminus\{0\}$ et continue en 0 donc on peut conclure que f est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$ et que $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.

4. La tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 a pour équation :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) = \frac{1}{2}x.$$

5. La fonction g est dérivable sur $]-1,+\infty[$ pour les mêmes raisons que f. On a pour $x \in]-1,+\infty[$,

$$g'(x) = 1 \times \ln(1+x) + \frac{1+x}{1+x} - 1 = \ln(1+x)$$

Or on a les équivalences suivantes pour $x \in]-1,+\infty[$:

$$g'(x) > 0 \iff \ln(1+x) > 0 \iff 1+x > \mathrm{e}^0 \iff x > 0$$

La fonction g est décroissante sur $]-1,0[$ et croissante sur $]0,+\infty[$. De plus $g(0) = 0$ donc g atteint son minimum en 0 et il vaut 0.

Remarquons que pour $x \in]-1,+\infty[\setminus\{0\}$,

$$f'(x) = \frac{(x+1)\ln(x+1) - x}{x^2(x+1)} = \frac{g(x)}{x^2(x+1)}$$

Ainsi $f'(x) = 0 \iff g(x) = 0$. Or on vient de montrer que g s'annulait une unique fois en 0 sur $]-1,+\infty[$. Donc pour tout $x \in]-1,+\infty[\setminus\{0\}$, $f'(x) \neq 0$. De plus, $f'(0) = \dfrac{1}{2} \neq 0$. Ainsi a fonction f ne possède pas de tangente horizontale.

6. Dressons le tableau de variations de f. Comme g est décroissante sur $]-1,0[$ et croissante sur $]0,+\infty[$ et qu'elle s'annule en 0, on en déduit que pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $g(x) \geqslant 0$. Ainsi $\forall x \in]-1,+\infty[$, $f'(x) \geqslant 0$.

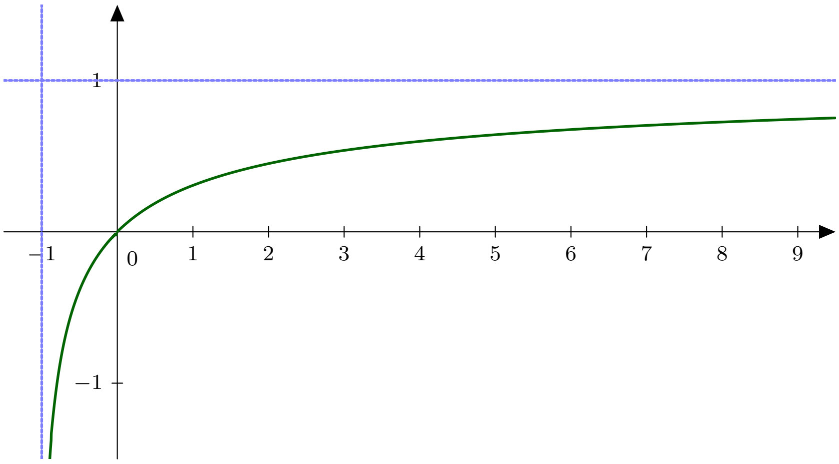
x	-1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	
f	$\Vert$	$\nearrow$	

7. On a : $\lim\limits_{x\to -1} \ln(1+x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -\infty$, la courbe de f admet donc une asymptote verticale en -1.
Au voisinage de $+\infty$, on a :

$$f'(x) = 1 - \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{\ln(x) + \ln(1+\frac{1}{x})}{x} = 1 - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{x}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissance comparée, on obtient donc que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Ainsi la courbe de f possède une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ au voisinage de $+\infty$.

8. On a :



3 Exercice 11

1. On a : $\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc par composée $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$.
   On a : $\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc par composée $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2} + 0 = -\frac{\pi}{2}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, posons $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. En effet, $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $x \arctan(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc par composée puis somme, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. On a pour tout réel x non nul, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} \end{aligned}$$

   La fonction f est donc constante sur $]0,+\infty[$ et sur $]-\infty,0[$.
3. La fonction f est donc constante sur $]0,+\infty[$ et sur $]-\infty,0[$. qui sont tous les deux des intervalles. Il existe donc $(C_1,C_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in]-\infty,0[, f(x) = C_1 \quad \text{et} \quad \forall x \in]0,+\infty, f(x) = C_2.$$

   Or $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ donc $C_1 = -\frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$ donc $C_2 = \frac{\pi}{2}$.

4 Exercice 13

1. Soit $x \in]-1,+\infty[$ fixé, on définit pour $t \in]-1,+\infty[$ la fonction f par $f(t) = \ln(1+t)$.
   La fonction $t \mapsto 1+t$ est continue, dérivable sur $]-1,+\infty[$ et à valeurs dans RR_+^*, la fonction $t \mapsto \ln(t)$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par composée la fonction f est continue, dérivable sur $]-1,+\infty[$.
   Soit $t \in]-1,+\infty[$,

$$f'(t) = \frac{1}{1+t}.$$

   On doit dès à présent distinguer deux cas :
   (a) $x > 0$
   (b) $x \in]-1,0[$

   Commençons par le cas $x > 0$. On travaille alors sur le segment $[0,x]$.
   Soit $t \in [0,x]$ alors $1 \leqslant 1+t \leqslant 1+x$, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient :

$$\frac{1}{1+x} \leqslant f'(t) \leqslant 1.$$

   Ainsi d'après l'inégalité des accroissements finis appliquée sur $[0,x]$, on obtient :

$$\frac{1}{1+x}(x-0) \leqslant f(x) - f(0) \leqslant 1 \times (x-0)$$

i.e.

$$\frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.$$

Traitons maintenant le cas où $x \in]-1, 0[$. On travaille alors sur le segment $[x, 0]$.
Soit $t \in [x, 0]$ alors $1 + x \leqslant 1 + t \leqslant 1$, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_-^*$, on obtient :

$$1 \leqslant f'(t) \leqslant \frac{1}{1+x}.$$

Ainsi d'après l'inégalité des accroissements finis appliquée sur $[x, 0]$, on obtient :

$$1(0-x) \leqslant f(0) - f(x) \leqslant \frac{1}{1+x} \times (0-x)$$

i.e.

$$-x \leqslant -\ln(1+x) \leqslant -\frac{x}{1+x}$$

ce qui équivaut à :

$$\frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.$$

Pour conclure, il reste à vérifier que l'inégalité est également vraie pour $x = 0$.

2. Soit $x \in]0, +\infty[$ fixé, on définit pour $t \in]0, +\infty[$ la fonction f par $f(t) = \arctan(t)$.
La fonction f est continue, dérivable sur $]0, +\infty[$.
Soit $t \in]0, +\infty[$,

$$f'(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

Soit $t \in [0, x]$ alors par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$, $1 \leqslant 1 + t^2 \leqslant 1 + x^2$, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient :

$$\frac{1}{1+x^2} \leqslant f'(t) \leqslant 1.$$

Ainsi d'après l'inégalité des accroissements finis appliquée sur $[0, x]$, on obtient :

$$\frac{1}{1+x^2}(x-0) \leqslant f(x) - f(0) \leqslant 1 \times (x-0)$$

i.e.

$$\frac{x}{1+x^2} \leqslant \arctan(x) \leqslant x.$$

3. Posons pour $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $f(x) = \mathrm{e}^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}$. Montrons qu'elle est toujours positive. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a :

$$f'(x) = \mathrm{e}^x - 1 - x.$$

Etudions le signe de sa dérivée. Pour cela, on va utiliser l'inégalité des accroissements finis.
En effet, fixons $x \in \mathbb{R}_+$ et posons pour $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction g définie par $g(t) = \mathrm{e}^t$. On a :

$$g'(t) = \mathrm{e}^t.$$

Soit $t \in [0, x]$, on a par croissance de la fonction $\exp$, $1 \leqslant g'(x) \leqslant \mathrm{e}^x$ donc d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$1 \times (x-0) \leqslant g(x) - g(0) \leqslant \mathrm{e}^x(x-0).$$

Gardons seulement l'inégalité de gauche et on obtient :

$$x \leqslant \mathrm{e}^x - 1$$

i.e pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\mathrm{e}^x - x - 1 \geqslant 0$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) \geqslant 0$. On en déduit que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $f(0) = 0$ ainsi f est bien toujours positive sur $\mathbb{R}_+$ et on a le résultat voulu.

5 Exercice 17

Soit f une fonction polynôme de degré n. Notons $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ ses n racines distinctes.

La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, on a $f(x_1) = f(x_2)$ donc d'après le théorème de Rolle, il existe $y_1 \in]x_1, x_2[$ tel que $f'(y_1) = 0$.
On applique alors de nouveau le théorème de Rolle sur $[x_2, x_3]$ puis sur $[x_3, x_4]$ etc. Rédigeons cela proprement :

Pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, f est continue sur $[x_i, x_{i+1}]$ et dérivable sur $]x_i, x_{i+1}[$ et on a :

$$f(x_i) = f(x_{i+1})$$

donc d'après le théorème de Rolle, il existe $y_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $f'(y_i) = 0$.
On a donc bien montré que f' admettait $n-1$ racines. Elles sont bien distinctes car les racines appartiennent toutes à des intervalles disjonts.

6 Exercice 18

1. Soit un entier $k \geqslant 2$, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc en particulier elle est dérivable sur $[k-1, k]$, on a pour tout $x \in [k-1, k]$,
$$f'(x) = \frac{1}{x^2}.$$
Ainsi pour $x \in [k-1, k]$, par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$, on a :
$$(k-1)^2 \leqslant x^2 \leqslant k^2$$
puis par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :
$$\frac{1}{k^2} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{(k-1)^2}$$
f étant continue et dérivable sur $[k-1, k]$ et sa dérivée étant bornée sur cet intervalle, on a, d'après l'inégalité des accroissements finis :
$$\frac{1}{k^2}(k-(k-1)) \leqslant f(k) - f(k-1) \leqslant \frac{1}{(k-1)^2}(k-(k-1)$$
i.e.
$$\frac{1}{k^2} \leqslant f(k) - f(k-1) \leqslant \frac{1}{(k-1)^2}.$$

2. Sommons l'inégalité de gauche pour k variant de 2 à n, on obtient :
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=2}^{n} (f(k) - f(k-1)).$$
Or on a :
$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} (f(k) - f(k-1)) &= \sum_{k=2}^{n} f(k) - \sum_{k=2}^{n} f(k-1) \quad \text{par linéarité de la somme} \\ &= \sum_{k=2}^{n} f(k) - \sum_{j=1}^{n-1} f(j) \quad \text{en posant dans la 2ème somme } j = k-1 \\ &= f(n) - \sum_{k=2}^{n-1} f(k) - \sum_{j=2}^{n-1} f(j) - f(1) \\ &= f(n) - f(1).\end{aligned}$$
Ainsi pour tout entier $n \geqslant 2$:
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant f(n) - f(1).$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0.$$
La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc strictement croissante.

4. D'après la question précédente pour $n \geqslant 2$, on a :
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant f(n) - f(1)$$
i.e.
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 - \frac{1}{n}$$
i.e.
$$S_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}.$$
Or pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $2 - \dfrac{1}{n} \leqslant 2$, ainsi $S_n \leqslant 2$. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par 2.
5. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par 2 donc d'après le théorème de convergence monotone, on peut affirmer qu'elle converge.

7 Exercice 20

1. La fonction $x \mapsto 1 + x$ est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. La fonction $\ln$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par composée et produit, f est dérivable sur $]-1, +\infty[$. On a pour $x \in]-1, +\infty[$,
$$f'(x) = \frac{3}{2(x+1).}$$
Ainsi $\forall x \in]-1, +\infty[$, $f'(x) > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $]-1, +\infty[$.
2. Posons la fonction g définie sur $]-1, +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$. La fonction g est dérivable sur $]-1, +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables. On a pour tout $x \in]-1, +\infty[$,
$$g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{3 - 2(x+1)}{2(x+1)} = \frac{1 - 2x}{2(x+1)}$$
Pour $x \in [1, 2]$, $g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur $[1, 2]$. On a :
$$g(1) = \frac{3}{2}\ln(2) - 1 = \ln(\sqrt{8}) - \ln(\mathrm{e})$$
or $7 < \mathrm{e}^2 < 8$ donc par croissance de la fonction racine, on a : $\sqrt{7} < \mathrm{e} < \sqrt{8}$ ainsi par croissance de la fonction $\ln$, $g(1) > 0$. On a également :
$$g(2) = \frac{3}{2}\ln(3) - 2 = \ln(\sqrt{27}) - \ln(\mathrm{e}^2)$$
Or $\sqrt{27} \in [5, 6]$ donc $\sqrt{27} < 7 < \mathrm{e}^2$ ainsi par croissance de la fonction $\ln$, $g(2) < 0$.
Comme de plus la fonction g est continue sur $[1, 2]$, on en déduit, avec le théorème des valeurs intermédiaires, que g s'annule une unique fois sur $[1, 2]$. Notons ce point α. L'équation $f(x) = x$ admet donc pour unique solution α sur $[1, 2]$.
3. Montrons ce résultat par récurrence. Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \geqslant \alpha$ ».
Initialisation $(n = 0)$ On a $u_0 = 3$ et $\alpha \in [1, 2]$ donc $u_0 \geqslant \alpha$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, $u_n \geqslant \alpha$ or d'après la question 1., la fonction f est croissante sur $]-1, +\infty[$ donc $f(u_n) \geqslant f(\alpha)$. Or par définition de α, $f(\alpha) = \alpha$ donc $u_{n+1} \geqslant \alpha$. Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
4. Soit $x \in [1, +\infty[$ alors $x + 1 \geqslant 2$ et donc par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{1}{x+1} \geqslant \dfrac{1}{2}$. Ainsi comme $\dfrac{3}{2} > 0$, on en déduit que $f'(x) \geqslant \dfrac{3}{4}$. De plus, pour $x \in [1, +\infty[$, on a clairement $f'(x) \geqslant 0$. On obtient donc l'encadrement voulu.
5. La fonction f est continue et dérivable sur $[1, +\infty[$, pour tout $x \in [1, +\infty[$, $0 \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{3}{4}$. De plus, $\alpha \in [1, +\infty[$ et on a montré à la question 3. que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \alpha \geqslant 1$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1, +\infty[$. Ainsi d'après l'inégalité des accroissements finis, on obtient :
$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \frac{3}{4}|u_n - \alpha|$$

Or $u_n \geqslant \alpha$ et f est croissante donc on a :

$$0 \leqslant f(u_n) - f(\alpha) \leqslant \frac{3}{4}(u_n - \alpha)$$

et donc par définition de α et de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$0 \leqslant u_{n+1} - \alpha \leqslant \frac{3}{4}(u_n - \alpha).$$

6. Montrons ce résultat par récurrence. Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $0 \leqslant u_n - \alpha \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n (u_0 - \alpha)$ ».

   Initialisation $(n = 0)$ On a : $\left(\frac{3}{4}\right)^0 (u_0 - \alpha) = u_0 - \alpha \geqslant 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   On a :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant u_{n+1} - \alpha &\leqslant \frac{3}{4}(u_n - \alpha) && \text{d'après la question 5.} \\ &\leqslant \frac{3}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n (u_0 - \alpha) && \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &\leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} (u_0 - \alpha) \end{aligned}$$

   Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   Conclusion Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

7. Comme $\frac{3}{4} \in]-1, 1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n (u_0 - \alpha) = 0$ ainsi d'après le théorème d'encadrement, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.