Dérivabilité

Exercice 1 (♣)

Soit f la fonction définie par morceaux

$$f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left| \begin{array}{ll} x^3 & \text{si } x \leq 1 \\ 3\ln(x)+1 & \text{si } x > 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est continue en 1.
2. Étudier la dérivabilité de f en 1.

Exercice 2 (♣)

Soit f la fonction définie par morceaux

$$f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left| \begin{array}{ll} e^x & \text{si } x < 0 \\ x^2+1 & \text{si } x \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est continue en 0.
2. Étudier la dérivabilité de f en 0.

Exercice 3 (♣)

Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - |x| \,.$$

Exercice 4 (♣)

Pour quelle(s) valeur(s) $a \in \mathbb{R}$, la fonction suivante est-elle dérivable en 0 ?

$$f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left| \begin{array}{ll} x & \text{si } x < 0 \\ \sin(ax) & \text{si } x \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Exercice 5 (♣)

Après avoir étudié la dérivabilité des fonctions suivantes, calculer leur fonction dérivée :

1. $a(x) = \dfrac{e^{2x}}{x^2-1}$
2. $b(x) = \exp\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$
3. $c(x) = \sqrt{x^2+x+1}$
4. $d(x) = x^x$
5. $e(x) = \cos(3x) - \sin(x)^2$
6. $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{(\cos(x)+2)^4}$
7. $g(x) = \ln(e^x + \cos^2(x))$

Exercice 6 (♦)

Montrer que la fonction f définie sur $]0,1[$ par $f(x) = \exp\left(\dfrac{1}{\ln(x)}\right)$ est prolongeable par continuité en 0 et en 1. Etudier sur $[0,1]$ la dérivabilité de ce prolongement.

Exercice 7 (♣)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1} \,.$$

1. Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et expliciter f'.
2. Dresser le tableau de variations de f.

Exercice 8 (♣)

Trouver tous les extrema locaux du polynôme défini par :

$$f(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 8x + 1 \,.$$

Exercice 9 (♣)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = x\ln(x) \,.$$

1. Étudier les variations de f.
2. En déduire que f réalise une bijection de $\left[\dfrac{1}{e};+\infty\right[$ sur un intervalle à préciser.
3. Sur quel intervalle f^{-1} est-elle dérivable ?
4. Calculer $(f^{-1})'(0)$. Calculer $f(e)$ et $f(e^2)$ et en déduire $(f^{-1})'(e)$ et $(f^{-1})'(2e^2)$.

Exercice 10 (♥)

Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par

$$f : \left\{ \begin{array}{lcl}]-1;\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left| \begin{array}{ll} \dfrac{x-\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

1. Montrer que la fonction f est continue sur $]-1;+\infty[$.
2. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;0[$ et sur $]0;+\infty[$, et expliciter sa dérivée.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;+\infty[$.
   On pourra admettre que
   $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = \frac{-1}{2}$$
4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.
5. Étudier la fonction g définie par
   $$g(x) = (1+x)\ln(1+x) - x$$
   sur $]-1;+\infty[$, et étudier ensuite l'existence de tangente horizontale pour f.

6. Dresser le tableau de variations de f sur $]-1;+\infty[$.
7. Déterminer la nature des branches asymptotiques de f en -1 et en $+\infty$, puis tracer la courbe de f.

Exercice 11 (♥)

On définit l'application $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

1. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
2. Montrer que l'application f est constante sur $]0,+\infty[$ et sur $]-\infty,0[$.
3. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \dfrac{\pi}{2}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*, f(x) = -\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 12 (♦)

Simplifier l'expression suivante sur $]0;+\infty[$

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right) - \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) + \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right).$$

Exercice 13 (♥)

Établir les inégalités suivantes :

1. $\forall x \in]-1;+\infty[, \quad \dfrac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x,$
2. $\forall x > 0, \quad \dfrac{x}{1+x^2} \leq \arctan(x) \leq x,$
3. (♠) $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \mathrm{e}^x \geq 1 + x + \dfrac{x^2}{2}.$

Exercice 14 (♣)

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\left|\sqrt{2+x} - 2\right| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |x-2| .$$

Exercice 15 (♣)

Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable s'annulant en a et b.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) + \alpha f(c) = 0$.
2. Montrer qu'il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) + cf(c) = 0$

Exercice 16 (♣)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $e^{-a}f(a) = e^{-b}f(b)$.
Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = f(c)$.

Exercice 17 (♥)

Montrer que si une fonction polynôme f de degré n admet n racines réelles distinctes alors f' admet $n-1$ racines distinctes.

Exercice 18 (♥)

1. Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$. En appliquant l'inégalité des accroissements finis sur $[k-1;k]$ à la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{-1}{x}$, montrer que
$$\frac{1}{k^2} \leq f(k) - f(k-1) \leq \frac{1}{(k-1)^2} .$$
2. En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq f(n) - f(1) .$$
3. Soit (S_n) la suite définie pour tout entier $n \geq 1$ par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Montrer que (S_n) est croissante et majorée.
4. En déduire que la suite (S_n) converge.

Exercice 19 (♠)

A l'aide du théorème des accroissements finis, déterminer

$$\lim_{x\to+\infty} \left((x+1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}} - x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right).$$

Exercice 20 (♥)

On considère la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{3}{2}\ln(x+1).$$

1. Étudier les variations de f sur $]-1;+\infty[$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $[1;2]$. On rappelle que $7 < e^2 < 8$.
3. On pose $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, $u_n \geq \alpha$.
4. Montrer que $\forall x \in [1;+\infty[, 0 \leq f'(x) \leq \dfrac{3}{4}$.
5. Montrer que pour tout entier naturel n, on a :
$$0 \leq u_{n+1} - \alpha \leq \frac{3}{4}(u_n - \alpha) .$$
6. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:
$$0 \leq u_n - \alpha \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n (u_0 - \alpha) .$$
7. En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

♣ Du trèfle à brouter...
♥ À connaître par coeur.
♠ Qui s'y frotte s'y pique !
♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau !