Correction partielle du TD 12

Table des matières

1 Exercice 3

- Tout d'abord, on a clairement $F \subset \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
- On a : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in F$ car $2 \times 0 - 5 \times 0 + 0 = 0$ et $0 + 0 = 0$. Ainsi $F \neq \emptyset$.
- Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in F$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, montrons que $\lambda X + Y \in F$.
  Tout d'abord, on a :
  $$\lambda X + Y = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + y_1 \\ \lambda x_2 + y_2 \\ \lambda x_3 + y_3 \end{pmatrix} \in F$$
  Calculons ensuite :
  $$\begin{aligned} 2(\lambda x_1 + y_1) - 5(\lambda x_2 + y_2) + \lambda x_3 + y_3 &= \lambda(2x_1 - 5x_2 + x_3) + 2y_1 - 5y_2 + y_3 \\ &= \lambda \times 0 + 0 \quad \text{car } (X, Y) \in F^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$
  Ainsi $\lambda X + Y \in F$

On peut donc en conclure que F est un sous-espaces vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

2 Exercice 5

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, notons F l'ensemble des polynômes réels admettant a et b comme racine, on peut écrire :

$$F = \{P \in \mathbb{R}_2[x] \mid P(a) = P(b) = 0\}$$

Montrons que F est un sev de $\mathbb{R}_2[x]$.

- On a clairement $F \subset \mathbb{R}_2[x]$.
- Tous les réels étant racines du polynôme nul, il appartient à F et $F \neq \emptyset$.
- Soient $(P, Q) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, montrons que $\lambda P + Q \in F$. On a, comme $P(a) = P(b) = Q(a) = Q(b) = 0)$:
  $$(\lambda P + Q)(a) = \lambda P(a) + Q(a) = \lambda \times 0 + 0 \times = 0$$
  et
  $$(\lambda P + Q)(b) = \lambda P(b) + Q(b) = \lambda \times 0 + 0 \times = 0$$
  Ainsi $\lambda P + Q \in F$

On peut donc en conclure que F est un sous-espaces vectoriel de $\mathbb{R}_2[x]$.

3 Exercice 6

1. Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   - On a clairement $F \subset \mathbb{R}^3$
   - Comme $0 + 0 - 0 = 0$, on a : $(0, 0, 0) \in F$ et $F \neq \emptyset$
   - Soient $X_1 = (x_1, y_1, z_1) \in F$ et $X_2 = (x_2, y_2, z_2) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, montrons que $\lambda X_1 + X_2 \in F$.
     Tout d'abord, on a :
     $$\lambda X_1 + X_2 = (\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2, \lambda z_1 + z_2)$$
     et donc :
     $$\lambda x_1 + x_2 + \lambda y_1 + y_2 - (\lambda z_1 + z_2) = \lambda(x_1 + y_1 - z_1) + x_2 + y_2 - z_2 = \lambda \times 0 + 0 = 0$$
     car $(X_1, X_2) \in F^2$. Ainsi $\lambda X_1 + X_2 \in F$

   On peut donc en conclure que F est un sous-espaces vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

   Montrons que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On remarque G peut s'écrire :
   $$G = \{(a, a, a) + (-b, b, -3b) \in \mathbb{R}^3 \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \{a(1, 1, 1) + b(-1, 1, -3) \in \mathbb{R}^3 \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$
   Ainsi $G = \mathrm{Vect}((1, 1, 1), (-1, 1, -3))$. G est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminons $F \cap G$. Soit $X \in F \cap G$ alors en particulier $X \in G$ donc il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $X = (a-b, a+b, a-3b)$. De plus $X \in F$ donc on a :

$$a-b+a+b-(a-3b)=0 \quad \text{i.e.} \quad a+3b=0 \quad \text{i.e.} \quad a=-3b$$

Ainsi $X = (-4b,-2b,-6b) \in \mathrm{Vect}((-4,-2,-6)) = \mathrm{Vect}((2,1,3))$.
On en déduit que $F \cap G \subset \mathrm{Vect}((2,1,3))$.

De plus, on a, d'une part, $(2,1,3) \in F$ donc $\mathrm{Vect}((2,1,3)) \subset F$. On a d'autre part, $(2,1,3) = \frac{3}{2}(1,1,1) - \frac{1}{2}(-1,1,-3) \in G$ donc $\mathrm{Vect}((2,1,3)) \subset G$. On en déduit que $\mathrm{Vect}((2,1,3)) \subset F \cap G$.

En conclusion, $F \cap G = \mathrm{Vect}((2,1,3))$.

$F \cap G$ étant un espace engendré par un vecteur de $\mathbb{R}^3$ c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

4 Exercice 8

Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- On a clairement $F \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- La suite nulle appartient bien à F car si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$ on a clairement pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 = n \times +0$. Ainsi $F \neq \emptyset$.
- Soient $((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, montrons que $\lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} \lambda u_{n+2} + v_{n+2} &= \lambda(nu_{n+1} + u_n) + nv_{n+1} + v_n \quad \text{car } ((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in F^2 \\ &= n(\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) + \lambda u_n + v_n \end{aligned}$$

Ainsi $\lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$.

On peut donc en conclure que F est un sous-espaces vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

5 Exercice 9

1. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On peut écrire : $F = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$. Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   - On a clairement $F \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
   - On a : $0_3 \times A = A \times 0_3$ donc $0_3 \in F$ et $F \neq \emptyset$
   - Soient $(M_{1,M}2) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, montrons que $\lambda M_1 + M_2 \in F$. Comme M_1 et $M2$ commutent avec A, on a :

   $$A(\lambda M_1 + M_2) = \lambda AM_1 + AM_2 = \lambda M_1 A + M_2 A = (\lambda M_1 + M_2)A$$

   Ainsi $\lambda M_1 + M_2 \in F$

   On peut donc en conclure que F est un sous-espaces vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. On peut écrire $G = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid {}^tM = M\}$, montrons que G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   - On a clairement $G \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
   - La matrice nulle est symétrique donc $G \neq \emptyset$
   - Soient $(M_1, M_2) \in G^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, montrons que $(\lambda M_1 + M_2) \in G$. Comme M_1 et M_2 sont symétriques, on a :

   $${}^t(\lambda M_1 + M_2) = \lambda {}^tM_1 + {}^tM_2 = \lambda M_1 + M_2$$

   Ainsi $\lambda M_1 + M_2 \in G$.

   On peut donc en conclure que G est un sous-espaces vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
3. La matrice nulle n'est pas inversible donc $0_3 \in H$ donc H ne peut pas être un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

6 Exercice 15

1. Notons A la matrice $A = \begin{pmatrix} -5 & -5 & -4 \\ -6 & -4 & -4 \\ 12 & 10 & 9 \end{pmatrix}$. Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :
   - On a clairement $E \subset \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- La matrice colonne nulle vérifie $A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ donc appartient à E et $E\neq\emptyset$.
- Soient $(X_1,X_2)\in E^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, montrons que $\lambda X_1+X_2\in E$. Comme $(X_1,X_2)\in F^2$, on a :
$$A(\lambda X_1+X_2)=\lambda AX_1+AX_2=\lambda X_1+X_2$$
ainsi $\lambda X_1+X_2\in E$.

On peut en conclure que E est un sev de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

2. On a les équivalences suivantes :
$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E\iff A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}-5x-5y-4z\\-6x-4y-4z\\12x+10y+9z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl}-6x&-&5y&-&4z&=&0\\-6x&-&5y&-&4z&=&0\\12x&+&10y&+&8z&=&0\end{array}\right.$$
On remarque dans le système linéaire que $L_3=-2L_1=-2L_2$, ainsi :
$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E\iff 6x+5y+4z=0$$

3. La CNS déterminée à la question précédente va nous permettre d'exhiber une famille génératrice. On peut écrire que :
$$E=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\mid 6x+5y+4z=0\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\mid x=-\frac{5}{6}y-\frac{2}{3}z\right\}$$
$$E=\left\{\begin{pmatrix}-\frac{5}{6}y-\frac{2}{3}y\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\mid (y,z)\in\mathbb{R}^2\right\}=\left\{\begin{pmatrix}-\frac{5}{6}y\\y\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}z\\0\\z\end{pmatrix}\mid (y,z)\in\mathbb{R}^2\right\}$$
$$E=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-\frac{5}{6}\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$
La famille $\left(\begin{pmatrix}-\frac{5}{6}\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est donc une famille génératrice de E.

4. La famille génératrice de E : $\left(\begin{pmatrix}-\frac{5}{6}\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est libre car composée de deux vecteurs non colinéaires, c'est donc une base de E.

7 Exercice 20

1. On peut écrire que :
$$F=\left\{\begin{pmatrix}a\\2a\\-3a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b\\2b\\-3b\end{pmatrix}\mid (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\right)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\right)$$
Ainsi F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\right)$ est génératrice de F et elle est libre car composée d'un unique vecteur non nul, c'est donc une base de F.

2. On peut écrire que :
$$F=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})\mid z=x+y\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\x+y\\t\end{pmatrix}\mid (x,y,t)\in\mathbb{R}^3\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\0\\x\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\y\\y\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\\t\end{pmatrix}\mid (x,y,t)\in\mathbb{R}^3\right\}$$

Ainsi $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ et F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. On a également que la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de F.

Montrons qu'elle est libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$. On obtient alors directement $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = 0$. La famille est donc libre et elle forme une base de F.

3. On peut écrire que :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z = 2x \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{2}(z-x) = \frac{1}{2}(2x-x) = \frac{1}{2}x \right\} = \left\{ \begin{pmatrix}x\\ \frac{1}{2}x\\ 2x\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

On a donc $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ 2\end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}\right)$. Ainsi F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

La famille $\left(\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}\right)$ est génératrice de F et libre car composée d'un unique vecteur non nul, c'est donc une base de F.