Introduction aux espaces vectoriels

Exercice 1 (♣)

Dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on pose pour tout réel k : $e_1 = \begin{pmatrix}1\\k\\2\end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix}-1\\8\\k\end{pmatrix}$. Déterminer k pour que le vecteur $x = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ soit combinaison linéaire des vecteurs e_1 et e_2.

Exercice 2 (♣)

Parmi les espaces suivants, déterminer ceux qui sont des espaces vectoriels :

1. $F_1 = \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \quad | \quad x_1 + x_2 = 1 \right\}$
2. $F_2 = \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \quad | \quad x_1 - 2x_2 = 0 \right\}$
3. $F_3 = \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \quad | \quad x_1 x_2 = 0 \right\}$
4. $F_4 = \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \quad | \quad x_1^2 + x_2 - x_3 = 0 \right\}$

Exercice 3 (♥)

Montrer que
$$F = \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \text{ et } x_2 + x_3 = 0 \right\}$$
est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 4 (♣)

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que
$$F = \left\{ X = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \quad | \quad MX = 0_{3,1} \right\}$$
est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 5 (♥)

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, montrer que l'ensemble des polynômes réels de degré 2 admettant a et b comme racine est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[x]$.

Exercice 6 (♥)

On considère les deux ensembles suivants :
$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\right\}$$
et $G = \left\{(a-b, a+b, a-3b) \in \mathbb{R}^3 \mid (a,b) \ \in \mathbb{R}^2\right\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $F \cap G$. Est-ce un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 7 (♣)

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

1. $\left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ bornée } \right\}$
2. $\left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ monotone } \right\}$
3. $\left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ arithmétique } \right\}$

Exercice 8 (♥)

Montrer que $F = \left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = nu_{n+1} + u_n\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 9 (♥)

1. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer que l'ensemble F des matrices M carrées d'ordre 3 qui commutent avec A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Démontrer que l'ensemble G des matrices M symétriques d'ordre 3 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
3. L'ensemble H des matrices inversibles est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Exercice 10 (♣)

On considère dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ les vecteurs suivants :
$$u = \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix}3\\7\\0\end{pmatrix}.$$
Montrer que $\mathrm{Vect}(u,v,w) = \mathrm{Vect}(u,v)$.

Exercice 11 (♣)

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $(1,-1,2)$ et $(2,1,1)$. Montrer qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que
$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}.$$

Exercice 12 (♣)

Étudier la liberté des familles suivantes :

1. $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\8\\16\end{pmatrix} \right)$ dans $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.
2. $\left(\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\5\end{pmatrix} \right)$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
3. $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \right)$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 13 (♣)

Soit $f_1(x) = \cos(x)$, $f_2(x) = x\cos(x)$, $f_3(x) = \sin(x)$ et $f_4(x) = x\sin(x)$. La famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est-elle libre ou liée dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}([0, 2\pi], \mathbb{R})$?

Exercice 14 (♠)

Pour tout entier $0 \leq k \leq n$, on pose $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_k(x) = e^{kx}$. Montrer que la famille $(f_k)_{0\leq k\leq n}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 15 (♥)

Soit $E = \left\{ X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \quad | \quad \begin{pmatrix} -5 & -5 & -4 \\ -6 & -4 & -4 \\ 12 & 10 & 9 \end{pmatrix} X = X \right\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les réels x, y et z pour que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E$.
3. Déterminer une famille génératrice de E.
4. En déduire une base de E.

Exercice 16 (♣)

1. (a) Montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

   (b) Déterminer les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dans cette base.

2. (a) Montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

   (b) Déterminer les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ dans cette base.

Exercice 17 (♣)

Montrer que la famille $(x^2 + 1, x^2 + x - 1, x^2 + x)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

Exercice 18 (♠)

Soit $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de F.

Exercice 19 (♣)

Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on considère les vecteurs :

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. Quelles sont, dans cette base, les coordonnées du vecteur $t = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Exercice 20 (♥)

Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (l'entier n étant à choisir selon la situation) et en déterminer une base.

1. $F = \left\{ \begin{pmatrix} a+b \\ 2a+2b \\ -3a-3b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$
2. $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid x + y - z = 0 \right\}$
3. $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x + 2y - z = 0 \text{ et } 2x = z \right\}$

Exercice 21 (♠)

On pose $F = \{P \in \mathbb{R}_2[x] \mid P(2 - x) = P(x)\}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel.
2. Déterminer une famille de deux vecteurs génératrice de F.
3. Est-elle libre ?

Exercice 22 (♦)

Soit E l'ensemble des matrices de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 2a - b + c & 0 & a - 2b \\ a + b & a - b - c & 2a + b \\ a - 2b & a + 3b & a + b - 2c \end{pmatrix}$$

où a, b et c sont des réels.

1. Démontrer que E est un espace vectoriel.
2. Déterminer une base de E.
3. Montrer que l'ensemble F des matrices de la forme $M = \begin{pmatrix} 5\alpha & 0 & -4\alpha \\ 5\alpha & -5\alpha & 7\alpha \\ -4\alpha & 11\alpha & -3\alpha \end{pmatrix}$ est un sous-espace vectoriel de E, dont on donnera une base.

♣ Du trèfle à brouter...
♥ À connaître par coeur.
♠ Qui s'y frotte s'y pique !
♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau !