Correction partielle du TD 11

Table des matières

1 Exercice 1

1. En langage ensembliste, cela revient à montrer que : $(A \cup B) \cap C \subset A \cup (B \cap C)$.
   Soit $x \in (A \cup B) \cap C$ alors $x \in A \cup B$ et $x \in C$. Autrement dit, $x \in A$ ou $x \in B$ et $x \in C$ i.e. $x \in A \cap C$ ou $x \in B \cap C$.
   Or $A \cap C \subset A$ donc $x \in A$ ou $x \in B \cap C$ i.e. $x \in A \cup (B \cap C)$.
2. Montrons que si $A \subset C$ alors $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$.
   Comme vu précédemment, $x \in (A \cup B) \cap C$ signifie $x \in A \cap C$ ou $x \in B \cap C$. Or si $A \subset C$, on a : $A \cap C = A$ donc $x \in A$ ou $x \in B \cap C$ i.e. $x \in A \cup (B \cap C)$.
   On remarque que la réciproque est vraie. En effet, si $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$, on a :
   $$A \subset A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \subset C$$
   soit $A \subset C$. On peut donc affirmer que :
   $$(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C) \iff A \subset C$$

2 Exercice 2

1. (a) Le contraire de l'évènement A « les deux cartes tirées sont rouges » est $\overline{A}$ « une des deux cartes tirées n'est pas rouge ».
   Attention *: le piège serait de penser que l'évènement contraire est « les deux cartes tirées sont noires ». Il est important de comprendre que tout tirage ne réalisant pas l'évènement « les deux cartes tirées sont rouges » réalise* ***par définition*** *l'évènement contraire. Par exemple, si une carte est rouge et que l'autre noire, l'évènement « les deux cartes tirées sont rouges » n'est pas réalisé, ce qui signifie que c'est l'évènement contraire qui est réalisé.*
   (b) $A \cap B \cap \overline{C}$: « les deux cartes tirées sont un valet rouge et un dix rouge »
   (c) $\left(A \cap \overline{C}\right) \cap \left(B \cap \overline{C}\right) = A \cap B \cap \overline{C}$: « les deux cartes tirées sont un valet rouge et un dix rouge »
   (d) $A \cap B \cap C = \emptyset$: évènement impossible.
2.
   - « les deux cartes tirées sont des figures » correspond à l'évènement C. Le fait qu'elles ne soient pas toutes les deux rouges correspond à l'évènement $\overline{A}$. Ainsi $F = \overline{A} \cap C$.
   - « on obtient au plus une figure » est l'évènement contraire de C. Ainsi $G = \overline{C}$.

3 Exercice 3

1. L'ensemble des tirages possible est $\Omega = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$.
2. Le seul tirage pour lequel les deux jetons sont pairs est $(2,4)$, donc $A = \{(2,4)\}$.
   $\overline{A}$ correspond à l'ensemble des tirages pour lesquels les deux jetons ne sont pas pairs. Ainsi $\overline{A} = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(3,4)\}$.
   A **ou** $\overline{A}$ donne bien sûr l'ensemble des tirages possibles, i.e. $A \cup \overline{A} = \Omega$.
   A **et** $\overline{A}$ correspond bien sur à l'évènement impossible, i.e. $A \cap \overline{A} = \emptyset$.
3. Tout d'abord, l'ensemble C est donné par $C = \{(1,3),(2,4)\}$. Dès lors,
   - $\overline{C} = \{(1,2),(1,4),(2,3),(3,4)\}$,
   - $A \cup C = \{(1,3),(2,4)\}$,
   - $A \cap C = \{(2,4)\}$,
   - $A \cup \overline{C} = \{(1,2),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$,
   - $A \cap \overline{C} = \emptyset$.

4 Exercice 4

1.
   - « le premier 6 a été obtenu au deuxième lancer » signifie que l'on n'a pas obtenu de 6 au premier lancer **et** que l'on a obtenu un 6 au deuxième lancer. Ainsi $P_2 = \overline{A_1} \cap A_2$.
   - « le premier 6 a été obtenu au cinquième lancer » signifie que l'on n'a pas obtenu de 6 aux premier, deuxième, troisième et quatrième lancers, **et** que l'on a obtenu un 6 au cinquième lancer. Ainsi $P_5 = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap A_5$.
   - De la même manière, $P_n = \overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n$.
2. Si le deuxième 6 a été obtenu au troisième lancer, alors il y a deux possibilités :
   - soit le premier 6 a été obtenu au premier lancer et le deuxième 6 au troisième,
   - soit le premier 6 a été obtenu au deuxième lancer et le deuxième 6 au troisième.

Ainsi
$$D_3 = \left(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3\right) \cup \left(\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3\right).$$
Si le deuxième 6 a été obtenu au quatrième lancer, alors il y a cette fois trois possibilités :

- soit le premier 6 a été obtenu au premier lancer et le deuxième 6 au quatrième,
- soit le premier 6 a été obtenu au deuxième lancer et le deuxième 6 au quatrième,
- soit le premier 6 a été obtenu au troisième lancer et le deuxième 6 au quatrième.

Ainsi
$$D_4 = \left(A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap A_4\right) \cup \left(\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3} \cap A_4\right) \cup \left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3 \cap A_4\right).$$

5 Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $P(\{1, \ldots, k\}) = \lambda k^2$.

En particulier, on a :
$$P(\Omega) = 1 \iff \lambda n^2 = 1 \iff \lambda = \frac{1}{n^2}.$$
On pose donc $\lambda = \dfrac{1}{n^2}$ et dès lors pour $k \geqslant 2$, on a :
$$P(\{k\}) = P(\{1, \ldots, k\} - P(\{1, \ldots, k-1\})$$
car
$$\{k\} = \{1, \ldots, k\} \setminus \{1, \ldots, k-1\}$$
Ainsi :
$$P(\{k\}) = \frac{k^2}{n^2} - \frac{(k-1)^2}{n^2} = \frac{2k-1}{n^2}$$
Pour $k = 1$, $P(\{1\}) = \dfrac{1^2}{n^2} = \dfrac{2 \times 1 - 1}{n^2}$. Ainsi pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$,
$$P(\{k\}) = \frac{2k-1}{n^2}.$$
Réciproquement, on définit bien une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ en posant pour tout $k \in \Omega$, $P(\{k\}) = \dfrac{2k-1}{n^2}$ car ces valeurs sont positives et on peut vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{n^2} = 1$.

Par ailleurs,
$$P(\{1, \ldots, k\} = \sum_{i=1}^{k} \frac{2i-1}{n^2} = \frac{k^2}{n^2}.$$
La probabilité déterminée est donc bien solution.

6 Exercice 6

Remarquons que $\{a\} = \{a, b, c\} \setminus \{b, c\}$ donc comme $\{b, c\} \subset \{a, b, c\}$, on a :
$$P(\{a\}) = P(\{a, b, c\}) - P(\{b, c\}) = \frac{1}{2} - \frac{10}{21} = \frac{1}{42}.$$
De plus, $\{a, b, c, d\} = \{a, b, d\} \cup \{b, c\}$ donc, d'après la formule de Poincaré :
$$1 = P(\{a, b, c, d\}) = P(\{a, b, d\} \cup \{b, c\}) = P(\{a, b, d\}) + P(\{b, c\}) - P(\{b\})$$
ainsi
$$P(\{b\}) = \frac{2}{3} + \frac{10}{21} - 1 = \frac{3}{21.}$$
De plus,
$$P(\{c\}) = P(\overline{\{a, b, d\}}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

et

$$P(\{d\}) = P(\overline{\{a,b,c\}}) = 1 - \frac{1}{2}$$

. On vérifie qu'on a bien :

$$P(\{a\}) + P(\{b\}) + P(\{c\}) + P(\{d\}) = 1.$$

On retrouve également :

$$P(\{a,b,c\}) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P(\{a,b,d\}) = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad P(\{b,c\}) = \frac{10}{21}.$$

7 Exercice 9

Notons ainsi les événements suivants :

- C : « aimer les citrons »
- O : « aimer les oranges »

1. Nous devons calculer $P(O \cap \overline{C})$. En utilisant les formules du cours, on obtient :

$$P(O \cap \overline{C}) = P(O) - P(O \cap C) = 0,8 - 0,3 = 0,5.$$

2. Nous devons calculer $P(O \cup C)$. D'après la formule de Poincaré, nous avons :

$$P(O \cup C) = P(O) + P(C) - P(O \cap C) = 0,8 + 0,4 - 0,3 = 0,9.$$

3. Nous devons calculer $P(\overline{O} \cap \overline{C})$. En utilisant les formules du cours, on obtient :

$$P(\overline{O} \cap \overline{C}) = 1 - P(\overline{\overline{O} \cap \overline{C}}) = 1 - P(O \cup C) = 0,1.$$

4. Nous devons calculer $P(O \cap \overline{C} \cup \overline{O} \cap C)$. D'après la formule de Poincaré, nous avons :

$$P(O \cap \overline{C} \cup \overline{O} \cap C) = P(O \cap \overline{C}) + P(\overline{O} \cap C) - P(O \cap \overline{C} \cap \overline{O} \cap C) = 0,5 + P(\overline{O} \cap C) - 0$$

Or $P(\overline{O} \cap C) = P(\overline{0}) - P(\overline{O} \cap \overline{C}) = 1 - P(O) - P(\overline{O} \cap \overline{C}) = 1 - 0,8 - 0,1 = 0,1$.
Ainsi $P(O \cap \overline{C} \cup \overline{O} \cap C) = 0,5 + 0,1 = 0,6$.

8 Exercice 12

1. Notons A l'événement « la main contient le 1 ou le 21 ». On doit calculer $P(A)$ mais ici il est plus simple de calculer $P(\overline{A})$. On a $\overline{A}$: « la main ne contient ni le 1 ni le 21 ». Ainsi $\overline{A}$ est l'ensemble des parties à 5 éléments de $[\![2,20]\!]$ et donc card$(\overline{A}) = \binom{19}{5}$. L'univers Ω est l'ensemble des parties à 5 éléments de $[\![1,21]\!]$ donc card$(\Omega) = \binom{21}{5}$. On a alors :

$$P(\overline{A}) = \frac{\text{card}(\overline{A})}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\binom{19}{5}}{\binom{21}{5}} = \frac{19!}{5!(14)!} \times \frac{5!(16)!}{(21)!} = \frac{15 \times 16}{20 \times 21} = \frac{4}{7}.$$

Ainsi $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \frac{3}{7}$.

2. Notons B l'événement « la main contient au moins un multiple de 5 ». Encore une fois, il est plus simple de passer par l'événement contraire. On a : $\overline{B}$: « la main ne contient aucun multiple de 5 ». Choisir un élément de $\overline{B}$, c'est choisir 5 cartes parmi $[\![1,21]\!] \setminus \{5,10,15,10\}$. Ainsi card$(\overline{B}) = \binom{17}{5}$. On a donc :

$$P(\overline{B}) = \frac{\text{card}(\overline{B})}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\binom{17}{5}}{\binom{21}{5}} = \frac{17!}{5!(12)!} \times \frac{5!(16)!}{21!} = \frac{16 \times 15 \times 14 \times 13}{18 \times 19 \times 20 \times 21} = \frac{52}{171}$$

Ainsi $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = \frac{119}{171}$.

3. Notons C l'événement « la main contient exactement un multiple de 5 et un multiple de 3 ». Choisir un élément de C c'est :
   - choisir une carte parmi les multiples de 5 qui ne sont pas des multiples de 3 i.e. $\{5,10,20\}$
   - choisir une carte parmi les multiples de 3 qui ne sont pas des multiples de 5 i.e. $\{3,6,9,12,18,21\}$
   - choisir trois cartes parmi les cartes qui ne sont ni multiples de 3 ni multiples de 5 i.e. $\{1,2,4,7,8,11,13,14,16,17,19\}$

ou choisir le 15 puis choisir 4 cartes parmi les cartes qui ne sont ni multiples de 3 ni multiples de 5.
On a :

$$\text{card}(C) = \binom{5}{1}\binom{6}{1}\binom{11}{3} + \binom{1}{1}\binom{11}{4} = 11 \times 10 \times 3 \times 10$$

d'où $P(C) = \dfrac{\text{card}(C)}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{11 \times 10 \times 3 \times 10}{\binom{21}{5}} = \dfrac{1100}{6783}$.

9 Exercice 15

1. E et F sont des ensembles à 4 éléments, il y a $4! = 24$ bijections de E dans F.
2. (a) Il n'y a qu'une configuration où chaque homme danse avec son épouse sur les 24 configurations possibles. La probabilité que chacun des hommes danse avec son épouse est donc de $\dfrac{1}{24}$.

   (b) On choisit 2 hommes parmi les 4 qui dansent avec leurs épouses, pour les deux autres la partenaire est imposée. D'où une probabilité :

   $$\frac{\binom{4}{2}}{4!} = \frac{1}{4}.$$

   (c) On choisit l'homme parmi les 4 qui danse avec son épouse. Pour les 3 autres, il faut choisir une partenaire qui n'est pas une épouse : pour le 1er, il y a deux choix, pour les suivants : 1 seul choix. D'où une probabilité :

   $$\frac{\binom{4}{1} \times 2}{4!} = \frac{1}{3}.$$

   (d) Posons A l'événement : " au moins un homme danse avec son épouse " et pour $i \in [\![1, 4]\!]$ les événements A_i : " exactement i homme dans avec son épouse". On a, en utilisant les valeurs calculées aux questions précédentes :

   $$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{24} = \frac{5}{8}$$

10 Exercice 16

1. Il y a $\binom{49}{5}$ façons de cocher 5 cases parmi 49. On peut donc former $\binom{49}{5}$ grilles différentes.
2. (a) Notons A l'événement « la grille est perdante ». Une grille est perdante si elle a plus un numéro correcte. Il y a $\binom{44}{5}$ grilles n'ayant aucun numéro correct et $\binom{5}{1}\binom{44}{4}$ grilles ayant exactement un numéro correct. Ainsi $\text{card}(A) = \binom{44}{5} + \binom{5}{1}\binom{44}{4}$. On a donc :

   $$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\binom{44}{5} + \binom{5}{1}\binom{44}{4}}{\binom{49}{5}} \simeq 0,93$$

   (b) Notons B l'événement « la grille présente exactement deux bons numéros ». Le nombre de grilles présentant exactement 2 bons numéros est $\binom{5}{2}\binom{44}{3} = 132440$ donc $\text{card}(B) = 132440$. Ainsi :

   $$P(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{132440}{1906884} \simeq 0,07.$$

   (c) Notons C l'événement « la grille présente au moins 4 bons numéros ». On a :

   $$\text{card}(C) = \binom{5}{4}\binom{44}{1} + \binom{5}{5} = 221$$

   Ainsi $P(C) = \dfrac{\binom{5}{4}\binom{44}{1} + 1}{\binom{49}{5}} \simeq 0,0001$.

11 Exercice 22, Le problème de Monty Hall

1. (a) Le présentateur sait derrière quelle porte se trouve la voiture, il ne va donc pas l'ouvrir. Il choisit donc au hasard entre les deux autres portes. On a donc :

$$P_{V_1}(E) = \frac{1}{2}, \quad P_{V_2}(E) = \frac{1}{2}, \quad P_{V_3}(E) = 0.$$

   (b) D'après la formule de Bayes, on a :

$$P_E(V_1) = \frac{P(V_1)P_{V_1}(E)}{P(E)} \quad \text{et} \quad P_E(V_2) = \frac{P(V_2)P_{V_2}(E)}{P(E)}$$

   Au début du jeu, la voiture est placée de manière équiprobable derrière une des trois portes, on a alors :

$$P(V_1) = P(V_3) = P(V_3) = \frac{1}{3}.$$

   Il nous reste alors à calculer $P(E)$. Pour cela, utilisons la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{V_1, V_2, V_3\}$. On a alors :

$$\begin{aligned} P(E) &= P(V_1)P_{V_1}(E) + P(V_2)P_{V_2}(E) + P(V_3)P_{V_3}(E) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 0 \\ &= \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

   On a alors :

$$P_E(V_1) = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P_E(V_2) = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

2. Les calculs effectués à la question précédente peuvent donner l'impression que changer de porte ne va rien changer puisque sachant que le présentateur a ouvert la porte 3, on a une chance sur 2 que la voiture soit derrière la porte 1 ou derrière la porte 2. Et pourtant !

   Notons C l'événement : « choisir une porte à chèvre » et V l'événement : « choisir une porte à voiturer ».
   On a $P(C) = \frac{2}{3}$ et $P(V) = \frac{1}{3}$.
   Notons GCh l'événement : « gagner en changeant de porte » et $GSCh$ l'événement : « gagner sans changer de porte ».

   Lorsque le candidat choisit la porte 1 pour la première fois, il a une chance sur 3 d'avoir choisi la bonne porte. Si il ne change pas de choix, sa probabilité de gagner reste donc la même à savoir $\frac{1}{3}$. Cela se démontre avec le calcul suivant :

$$P(GSCh) = P(C)P_C(GSCh) + P(V)P_V(GSCh) = \frac{2}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}.$$

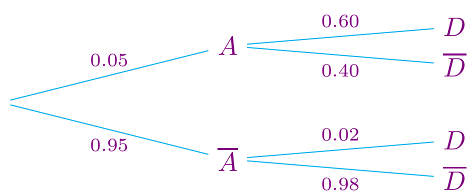
   Pour gagner en changeant de choix, il faut avoir choisi initialement une porte avec une chèvre. En effet, puisque le présentateur ouvre une porte avec une chèvre, la porte restante sera forcément celle de la voiture. La probabilité de gagner en changeant de porte est donc de $\frac{2}{3}$. Cela se démontre avec le calcul suivant :

$$P(GCh) = P(C)P_C(GCh) + P(V)P_V(GCh) = \frac{2}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0 = \frac{2}{3}.$$

   En conclusion, le candidat $\boxed{\text{double ses chances de gagner en changeant de porte.}}$

12 Exercice 26

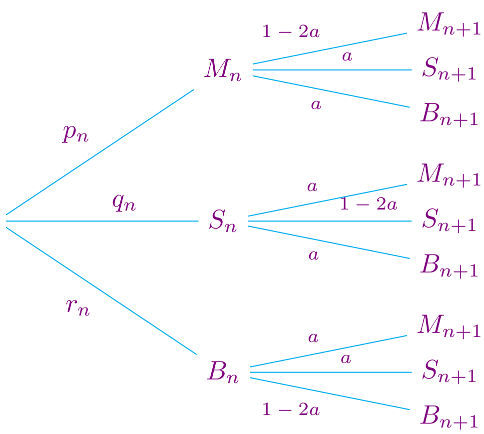
Je réalise **au brouillon** un arbre pondéré pour modéliser la situation.



1. D'après l'énoncé,
$$P(A)=\frac{5}{100}=\frac{1}{20},\qquad P_A(D)=\frac{60}{100}=\frac{3}{5},\qquad P_{\overline{A}}(\overline{D})=\frac{98}{100}=\frac{49}{50},$$
$$P(\overline{A})=1-\frac{1}{20}=\frac{19}{20},\qquad P_A(\overline{D})=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}\quad \text{et}\quad P_{\overline{A}}(D)=1-\frac{49}{50}=\frac{1}{50}.$$
2. D'après la formule des probabilités totales, comme $\{A,\overline{A}\}$ forme un système complet d'évènements,
$$\begin{aligned}P(D)&=P(A)\times P_A(D)+P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(D)\quad \text{Somme des branches menant à l'évènement } D\\&=\frac{1}{20}\times\frac{3}{5}+\frac{19}{20}\times\frac{1}{50}\\&=\frac{3}{100}+\frac{19}{1000}\\&=\frac{49}{1000}=0.049\end{aligned}$$
Donc 4.9% des CD achetés sont défectueux.
3. Je cherche $P_D(A)$. D'après la formule des probabilités conditionnelles,
$$P_D(A)=\frac{P(A\cap D)}{P(D)}=\frac{3}{100}\times\frac{1000}{49}=\frac{30}{49}.$$
Le client a acheté une boîte abîmée avec probabilité $\dfrac{30}{49}$.

13 Exercice 27

Je réalise un arbre pondéré au brouillon pour modéliser la situation.



1. D'après la formule des probabilités totales, comme pour tout $n\geqslant 1$, $\{M_n,S_n,B_n\}$ forme un système complet d'évènements,
$$\begin{aligned}&P(M_{n+1})=P(M_n)\times P_{M_n}(M_{n+1})+P(S_n)\times P_{S_n}(M_{n+1})+P(B_n)\times P_{B_n}(M_{n+1})\\\Longleftrightarrow\quad &p_{n+1}=(1-2a)p_n+aq_n+ar_n.\end{aligned}$$
De même,
$$\begin{aligned}&P(S_{n+1})=P(M_n)\times P_{M_n}(S_{n+1})+P(S_n)\times P_{S_n}(S_{n+1})+P(B_n)\times P_{B_n}(S_{n+1})\\\Longleftrightarrow\quad &q_{n+1}=ap_n+(1-2a)q_n+ar_n.\end{aligned}$$
2. Comme pour tout $n\geqslant 1$, $\{M_n,S_n,B_n\}$ forme un système complet d'évènements, alors $P(M_n)+P(S_n)+P(B_n)=P(\Omega)=1$, i.e. $p_n+q_n+r_n=1$. Donc
$$r_n=1-(p_n+q_n).$$
3. Soit $n\geqslant 1$, d'après les relations établies aux questions 1 et 2, on a :
$$\begin{aligned}p_{n+1}&=(1-2a)p_n+aq_n+ar_n\\&=(1-2a)p_n+aq_n+a(1-p_n-q_n)\\&=(1-2a)p_n+aq_n+a-ap_n-aq_n\\&=(1-2a-a)p_n+(a-a)q_n+a\\&=(1-3a)p_n+a\end{aligned}$$

Je procède de même pour q_{n+1} :

$$\begin{aligned}
q_{n+1} &= ap_n + (1-2a)q_n + ar_n \\
&= ap_n + (1-2a)q_n + a(1-p_n-q_n) \\
&= ap_n + (1-2a)q_n + a - ap_n - aq_n \\
&= (1-3a)q_n + a
\end{aligned}$$

Les deux suites $(p_n)_{n\geqslant 1}$ et $(q_n)_{n\geqslant 1}$ sont des suites arithmético-géométriques. Elles partagent même la même relation de récurrence.

4. $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite arithmético-géométrique, on applique la méthode de cours pour déterminer son expression.
On commence par chercher α tel que :

$$\alpha = (1-3a)\alpha + a.$$

On obtient $\alpha = \dfrac{1}{3}$. On pose alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = p_n - \dfrac{1}{3}$. Montrons que cette suite est géométrique.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{1}{3} \\
&= (1-3a)p_n + a - \frac{1}{3} \\
&= (1-3a)\left(u_n + \frac{1}{3}\right) + a - \frac{1}{3} \\
&= (1-3a)u_n + \frac{1}{3} - \cancel{3}a \times \frac{1}{\cancel{3}} + a - \frac{1}{3} \\
&= (1-3a)u_n + \frac{1}{3} - a + a - \frac{1}{3} \\
&= (1-3a)u_n
\end{aligned}$$

Donc $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite géométrique de raison $(1-3a)$. Enfin, puisque le titre est stable le premier jour, $p_1 = r_1 = 0$ et $q_1 = 1$. Ainsi $u_0 = p_0 - \dfrac{1}{3} = 0 - \dfrac{1}{3} = -\dfrac{1}{3}$. Comme la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est géométrique de raison $(1-3a)$ et de premier terme $u_1 = -\dfrac{1}{3}$, alors pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} = -\frac{1}{3} \times (1-3a)^{n-1}.$$

Et donc, pour tout $n \geqslant 1$,

$$p_n = u_n + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times (1-3a)^{n-1} = \frac{1}{3}\big(1 - (1-3a)^{n-1}\big).$$

De la même manière, comme les suites $(p_n)_{n\geqslant 1}$ et $(q_n)_{n\geqslant 1}$ vérifient la même relation de récurrence, alors la suite $\left(q_n - \dfrac{1}{3}\right)_{n\geqslant 1}$ est aussi géométrique de raison $(1-3a)$ mais de premier terme $q_1 - \dfrac{1}{3} = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$. Donc, pour tout $n \geqslant 1$,

$$q_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times (1-3a)^{n-1} = \frac{1}{3}\big(1 + 2\,(1-3a)^{n-1}\big).$$

Enfin, on en déduit r_n :

$$\begin{aligned}
r_n &= 1 - p_n - q_n \\
&= 1 - \frac{1}{3}\left(1-(1-3a)^{n-1}\right) - \frac{1}{3}\left(1+2(1-3a)^{n-1}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}(1-3a)^{n-1} - \frac{1}{3} - \frac{2}{3}(1-3a)^{n-1} \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(1-3a)^{n-1} \\
&= \frac{1}{3}\left(1-(1-3a)^{n-1}\right)
\end{aligned}$$

14 Exercice 28

Première partie

1. On a $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et on montre par le caclul que $J^2 = 3J$.

2. Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « il existe $u_n \in \mathbb{R}$ tel que $M^n = I_3 + u_n J$ ».

   Initialisation $(n = 0)$ On a, par convention, $M^0 = I_3$, posons $u_0 = 0$, on a alors : $M^0 = I_3 + u_0 J$. Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a :

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n \times M \\ &= (I_3 + u_n J) \times M \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= (I_3 + u_n J) \times (I_3 + J) \quad \text{d'après la question 1.} \\ &= I_3 + J + u_n J + u_n J^2 \\ &= I_3 + J + u_n J + 3u_n J \quad \text{car } J^2 = 3J \\ &= I_3 + (1 + 4u_n)J \\ &= I_3 + u_{n+1} J \quad \text{en posant } u_{n+1} = 4u_n + 1 \end{aligned}$$

   Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.

   Conclusion La propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4u_n + 1$ vérifiant $M^n = I_3 + u_n J$.

3. Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique. On commence par chercher α solution de l'équation : $\alpha = 4\alpha + 1$. On a alors $\alpha = -\frac{1}{3}$. On définit ensuite la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n + \frac{1}{3}$. Montrons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + \frac{1}{3} \\ &= 4u_n + 1 + \frac{1}{3} \\ &= 4(v_n - \frac{1}{3}) + \frac{4}{3} \\ &= 4v_n \end{aligned}$$

   La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison 4 et de premier terme $v_0 = u_0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{1}{3} \times 4^n.$$

   On en déduit l'expression de u_n :

$$u_n = v_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(4^n - 1).$$

4. D'après la question 2., on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = I_3 + u_n J$, on a donc :

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(4^n - 1) & \frac{1}{3}(4^n - 1) & \frac{1}{3}(4^n - 1) \\ \frac{1}{3}(4^n - 1) & \frac{1}{3}(4^n - 1) & \frac{1}{3}(4^n - 1) \\ \frac{1}{3}(4^n - 1) & \frac{1}{3}(4^n - 1) & \frac{1}{3}(4^n - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(4^n + 2)+ & \frac{1}{3}(4^n - 1) & \frac{1}{3}(4^n - 1) \\ \frac{1}{3}(4^n - 1) & \frac{1}{3}(4^n + 2) & \frac{1}{3}(4^n - 1) \\ \frac{1}{3}(4^n - 1) & \frac{1}{3}(4^n - 1) & \frac{1}{3}(4^n + 2) \end{pmatrix}$$

Deuxième partie

1. (a) Introduisons les événements suivants :
   - A_n : « la poule pond un oeuf de calibre A le jour n »
   - B_n : « la poule pond un oeuf de calibre B le jour n »
   - C_n : « la poule pond un oeuf de calibre C le jour n »

En utilisant le système complet d'événement $\{A_n, B_n, C_n\}$ et la formule des probabilités totales, on obtient :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P(A_{n+1}) \\ &= P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1}) \\ &= \frac{1}{2}P(A_n) + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \end{aligned}$$

On montre de la même manière que :

$$b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n$$

et

$$c_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n$$

Posons la matrice $U = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = UX_n$.

(b) On a $U = \frac{1}{4}M$ donc pour $n \in \mathbb{N}$, $U^n = \left(\frac{1}{4}\right)^n M^n$, ainsi :

$$U^n = \left(\frac{1}{4}\right)^n \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(4^n+2)+ & \frac{1}{3}(4^n-1) & \frac{1}{3}(4^n-1) \\ \frac{1}{3}(4^n-1) & \frac{1}{3}(4^n+2) & \frac{1}{3}(4^n-1) \\ \frac{1}{3}(4^n-1) & \frac{1}{3}(4^n-1) & \frac{1}{3}(4^n+2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(1+\frac{2}{4^n})+ & \frac{1}{3}(1-\frac{1}{4^n}) & \frac{1}{3}(1-\frac{1}{4^n}) \\ \frac{1}{3}(1-\frac{1}{4^n}) & \frac{1}{3}(1+\frac{2}{4^n}) & \frac{1}{3}(1-\frac{1}{4^n}) \\ \frac{1}{3}(1-\frac{1}{4^n}) & \frac{1}{3}(1-\frac{1}{4^n}) & \frac{1}{3}(1+\frac{2}{4^n}) \end{pmatrix}$$

2. Le premier oeuf pondu est de calibre C donc $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On peut montrer (par récurrence à écrire) que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = U^{n-1}U_1$. Calculons ensuite ce produit matriciel, on obtient :

$$X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(1-\frac{1}{4^{n-1}}) \\ \frac{1}{3}(1-\frac{1}{4^{n-1}}) \\ \frac{1}{3}(1+\frac{2}{4^{n-1}}) \end{pmatrix}$$

Comme $4 > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{4^{n-1}} = 0$ ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{1}{3}$$

15 Exercice 29

Pour justifier l'indépendance de ces événements, je vais vérifier que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}, \qquad A = \{2,4,6\}, \qquad B = \{3,6\} \quad \text{et} \quad A \cap B = \{6\}.$$

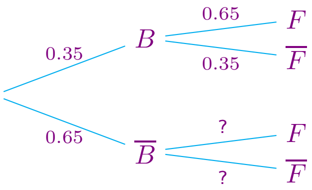
Donc

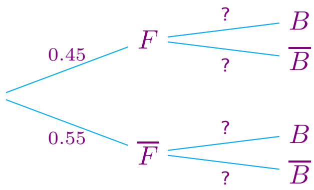
$$P(A) \times P(B) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{6}.$$

Comme $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, les évènements A et B sont indépendants.

16 Exercice 31

Je réalise un arbre pondéré pour modéliser la situation. Je note F l'évènement « être fumeur » et B l'évènement « avoir une bronchite ». Au vu des informations données dans l'énoncé, je peux réaliser deux arbres différents :





Pour chaque arbre, (au moins) une des informations données dans l'énoncé n'est pas utilisée. Sur le premier arbre, je n'ai pas utilisé le fait que $P(F) = \dfrac{45}{100}$. Sur le deuxième arbre, je n'ai ni utilisé le fait que $P(B) = \dfrac{35}{100}$, ni que $P_B(F) = \dfrac{65}{100}$.

Le premier arbre est sans aucun doute le plus utile pour résoudre l'exercice, puisque c'est celui qui comporte le moins d'inconnues (et qui par ailleurs utilise le plus de données de l'énoncé).

1. J'exprime les évènements dont je dois calculer les probabilités en fonction de B et de F :
$$E_1 = B \cap F, \qquad E_2 = B \cap \overline{F} \quad \text{et} \quad E_3 = \overline{B} \cap \overline{F}.$$
Alors, d'après la formule des probabilités composées,
$$P(E_1) = P(B \cap F) = P(B) \times P_B(F) = \frac{35}{100} \times \frac{65}{100} = \frac{7}{20} \times \frac{13}{20} = \frac{91}{400},$$
$$P(E_2) = P(B \cap \overline{F}) = P(B) \times P_B(\overline{F}) = \frac{35}{100} \times \frac{35}{100} = \frac{7}{20} \times \frac{7}{20} = \frac{49}{400}.$$
Par ailleurs, je sais que $P(F) = \dfrac{45}{100} = \dfrac{9}{20}$, donc $P(\overline{F}) = 1 - P(F) = \dfrac{11}{20}$. Et d'après la formule des probabilités totales, comme $\{B, \overline{B}\}$ forme un système complet d'évènements,
$$\begin{aligned} P(\overline{F}) &= P(B \cap \overline{F}) + P(\overline{B} \cap \overline{F}) \\ \frac{11}{20} &= \frac{91}{400} + P(\overline{B} \cap \overline{F}) \\ P(\overline{B} \cap \overline{F}) &= \frac{11}{20} - \frac{91}{400} = \frac{220}{400} - \frac{91}{400} = \frac{129}{400}. \end{aligned}$$
Autrement dit
$$P(E_3) = P(\overline{B} \cap \overline{F}) = \frac{129}{400}.$$
2. Je compare $P(B) \times P(F)$ et $P(B \cap F)$.
$$P(B) \times P(F) = \frac{7}{20} \times \frac{9}{20} = \frac{63}{400} \quad \text{et} \quad P(B \cap F) = P(E_1) = \frac{91}{400},$$
donc les évènements F et B ne sont pas indépendants.
3. Je cherche $P_F(B)$. D'après la formule des probabilités conditionnelles,
$$P_F(B) = \frac{P(B \cap F)}{P(F)} = \frac{91}{400} \times \frac{20}{9} = \frac{91}{20 \times 9} = \frac{91}{180}.$$
Ce fumeur a une bronchite avec probabilité $\dfrac{91}{180}$.