Probabilités sur un univers fini

Exercice 1 (♣)

Soient A, B, C trois événements d'un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

1. Vérifier que $(A \cup B) \cap C$ entraîne $A \cup (B \cap C)$.
2. À quelle condition sur A et C les deux événements précédents sont-ils égaux ?

Exercice 2 (♣)

On tire deux cartes dans un jeu de 32 cartes. On considère les ensembles suivants :

- $A = \{$ les deux cartes tirées sont rouges $\}$.
- $B = \{$ les deux cartes tirées sont un valet et un dix $\}$
- $C = \{$ les deux cartes tirées sont des personnages $\}$

1. Que représente les ensembles suivants ?
   (a) $\overline{A}$
   (b) $A \cap B \cap \overline{C}$
   (c) $\left(A \cap \overline{C}\right) \cap \left(B \cap \overline{C}\right)$
   (d) $(A \cap B) \cap C$
2. Écrire à l'aide des ensembles A, B, C les ensembles :
   - $F = \{$ les deux cartes tirées sont des figures et ne sont pas toutes les deux rouges $\}$
   - $G = \{$ on obtient au plus une figure $\}$

Exercice 3 (♣)

Dans une boîte, il y a 4 jetons disponibles numérotés de 1 à 4. On tire simultanément au hasard deux jetons.

- Donner tous les tirages possibles.
  Pour la suite, on note $A = \{$ les deux jetons sont pairs $\}$.
- Quels sont les tirages constituant les ensembles suivants : $\overline{A}$, « A ou $\overline{A}$ », $A \cap \overline{A}$.
- On considère l'ensemble $C = \{$la somme des chiffres numérotés sur les deux jetons est paire$\}$. Quels sont les tirages constituant les ensembles suivants :

$$\overline{C} \quad A \cup C\,, \quad «A \text{ et } C»\,, \quad «A \text{ ou } \overline{C}»\,, \quad A \cap \overline{C}\,.$$

Exercice 4 (♣)

Une épreuve aléatoire consiste à effectuer des lancers successifs d'un dé. Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 1, A_k désigne l'événement : "le k-ième lancer a fourni un 6". Exprimer les événements ci-dessous à l'aide des événements A_k et des opérations autorisées sur les événements.

- P_2 : "le premier 6 a été obtenu au deuxième lancer",
- P_5 : "le premier 6 a été obtenu au cinquième lancer",
- P_n : "le premier 6 a été obtenu au n-ième lancer", où $n \geq 2$.
- D_3 : "le deuxième 6 a été obtenu au troisième lancer",
- D_4 : "le deuxième 6 a été obtenu au quatrième lancer".

Exercice 5 (♠)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer une probabilité sur $\Omega = \{1, \ldots, n\}$ telle que la probabilité de l'événement $\{1, 2, \ldots, k\}$ soit proportionnelle à k^2.

Exercice 6 (♠)

Soit $\Omega = \{a, b, c, d\}$. Peut-on définir une probabilité P sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que :

$$P(\{a,b,c\}) = \frac{1}{2}\,, \quad P(\{a,b,d\}) = \frac{2}{3}\,, \quad P(\{b,c\}) = \frac{10}{21}\,.$$

Exercice 7 (♣)

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ tel que $P(A) = 1$ (on dit que A est presque sûr).

1. Montrer que $P(A \cup B) = 1$.
2. En déduire que $P(A \cap B) = P(B)$.

Exercice 8 (♠)

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. Montrer que :

$$\max\{0; P(A) + P(B) - 1\} \leq P(A \cap B) \leq \min\{P(A), P(B)\}\,.$$

Exercice 9 (♣)

Une enquête effectuée auprès d'un échantillon représentatif de la population française a révélé qu'il y a une probabilité
$0,8$ pour qu'un Français aime les oranges,
$0,4$ pour qu'un Français aime les citrons,
$0,3$ pour qu'un Français aime les oranges et citrons.
Quelle est la probabilité pour qu'un Français :

1. aime les oranges mais pas les citrons ?
2. aime les oranges ou les citrons ?
3. n'aime ni les oranges ni les citrons ?
4. aime soit les oranges, soit les citrons ?

Exercice 10 (♠)

Le paradoxe des anniversaires.
Dans une classe de n élèves, quelle est la probabilité p_n qu'au moins deux élèves fêtent leur anniversaire le même jour ? (on suppose qu'ils sont tous nés la même année et que ce n'est pas une année bissextile)
Utiliser `Python` pour évaluer p_{22}, p_{23} et p_{30}.

Exercice 11 (♣)

Un coffre contient 10 diamants, 15 émeraudes et 20 rubis. On prélève quatre pierres précieuses au hasard dans le coffre. Calculer la probabilité des événements suivants :

1. « les quatre pierres sont du même type »
2. « on obtient deux diamants et deux rubis »

Exercice 12 (♥)

Dans un jeu de tarot, il y a 21 atouts numérotés de 1 à 21. On prend cinq atouts au hasard. Calculer la probabilité qu'une main contienne :

1. Le 1 ou le 21.
2. Au moins un multiple de 5.
3. Exactement un multiple de 5 et un multiple de 3.

Exercice 13 (♠)

Une urne contient des boules numérotées de 1 à 10. On tire, sans remise, trois boules dans cette urne.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir des numéros en ordre croissant ?
2. Même question pour un tirage avec remise et des numéros en ordre strictement croissant.
3. Même question pour un tirage avec remise et des numéros en ordre croissant au sens large.

Exercice 14 (♠)

Quelle est la probabilité qu'une application de $\{1;\ldots;5\}$ dans $\{1;\ldots;5\}$ soit surjective ? Même question pour une application de $\{1;\ldots;5\}$ dans $\{1;\ldots;4\}$?

Exercice 15 (♠)

1. On considère les deux ensembles :
$$E=\{1;2;3;4\} \quad \text{et } F=\{a;b;c;d\}.$$
Quel est le nombre total de bijections de E sur F ?
2. Quatre hommes et leurs épouses décident de danser en se soumettant aux règles suivantes : les partenaires sont tirés au sort et sont de sexe différent ; tout le monde danse. Calculer la probabilité :
   (a) pour que chacun des hommes danse avec son épouse ;
   (b) pour que deux hommes seulement dansent avec leurs épouses ;
   (c) pour qu'un homme seulement danse avec son épouse ;
   (d) pour qu'au moins un homme danse avec son épouse.

Exercice 16 (♥)

Au loto, on doit cocher 5 cases dans une grille numérotée de 1 à 49.

1. Quel est le nombre de grilles différentes que l'on peut former ?
2. On a une grille gagnante si celle-ci contient au moins deux numéros parmi les cinq tirés.
   (a) Calculer la probabilité qu'une grille soit perdante.
   (b) Calculer la probabilité qu'une grille présente exactement deux bons numéros.
   (c) Calculer la probabilité qu'une grille présente au moins quatre bons numéros.

Exercice 17 (♠)

On veut ranger 10 livres distincts deux à deux sur une étagère horizontale. Quelle est la probabilité pour que trois livres donnés et nommés A, B et C soient rangés côte à côte ?

Exercice 18 (♦)

On lance un dé à quatre faces (numérotées de 1 à 4) n fois de suite. On note p_n la probabilité que les quatre chiffres $(1,2,3,4)$ apparaissent au moins une fois lors des n lancers.
Pour tout nombre entier $i \in \{1;\ldots;4\}$, on note A_i l'événement "le numéro i n'apparaît pas durant les n tirages".

1. Calculer $P(A_1 \cup A_2 \cup A_2 \cup A_4)$.
2. En déduire que $p_n = 1-4\left(\frac{1}{4}\right)^n+6\left(\frac{2}{4}\right)^n-4\left(\frac{3}{4}\right)^n$.
3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

Exercice 19 (♣)

Soient A,B,C trois événements d'un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P)$ avec $P(B\cap C)>0$. Vérifier que
$$P_{B\cap C}(A)P_C(B)=P_C(A\cap B).$$

Exercice 20 (♣)

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P)$ avec $P(A)>0$. Comparer les probabilités conditionnelles
$$P_{A\cup B}(A\cap B) \text{ et } P_A(A\cap B).$$

Exercice 21 (♣)

Une urne contient 20 boules dont 8 boules noires, 7 boules rouges et 5 boules blanches. On pioche sans remise 4 boules.

1. Calculer les probabilités des événements suivants :
   (a) A :«obtenir exactement deux boules blanches»
   (b) B :«obtenir au moins une boule blanche»
   (c) C :«obtenir autant de boules blanches que de boules rouges»
   (d) D :«n'obtenir aucune boule noire»
2. Calculer les probabilités conditionnelles suivantes $P_A(B)$, $P_B(A)$, $P_A(C)$, $P_C(A)$, $P_A(D)$, $P_D(A)$, $P_B(C)$, $P_C(B)$, $P_B(D)$, $P_D(B)$, $P_D(C)$, $P_C(D)$

Exercice 22 (♠)

Le problème de Monty Hall
Le finaliste d'un jeu télévisé est placé face à trois portes P_1, P_2 et P_3. Derrière l'une d'entre elles, il y a une voiture et derrière les autres il y a une chèvre. L'animateur sait derrière quelle porte se trouve la voiture et le candidat l'ignore bien sûr. Le candidat choisit la porte P_1. A cet instant l'animateur ouvre la porte P_3 derrière laquelle le candidat constate qu'il n'y a rien. L'animateur lui propose alors de changer son choix s'il le souhaite.
On note V_i l'événement : « la voiture se trouve derrière la porte numérotée i » et E l'événement : « le présentateur ouvre la porte numérotée 3 ».

1. (a) Déterminer sans calculs $P_{V_1}(E)$, $P_{V_2}(E)$ et $P_{V_3}(E)$.
   (b) Calculer $P_E(V_1)$ et $P_E(V_2)$.
2. Le candidat augmentera-t-il sa probabilité de gagner à ce jeu en changeant de choix ?

Exercice 23 (♣)

Une urne contient 8 boules blanches et 2 boules noires. On tire sans remise et successivement 3 boules de cette urne.

1. Quelle est la probabilité qu'au moins une boule noire figure à l'intérieur du tirage ?
2. Sachant qu'une boule noire figure dans le tirage. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit noire ?

Exercice 24 (♠)

Un fumeur décide de ne plus fumer. S'il ne fume pas le jour j, il ne fumera pas le jour $j+1$ avec une probabilité $\frac{2}{3}$. S'il fume le jour j, il ne fumera pas le jour $j+1$ avec la probabilité $\frac{1}{2}$. Quelle est la probabilité qu'il ne fume pas le jour n ?

Exercice 25 (♠)

Une succession d'individus $A_1, \ldots, A_n$ se transmet une information binaire du type « oui » ou « non ».
Chaque individu A_k transmet l'information qu'il a reçu avec la probabilité p à l'individu A_{k+1} ou la transforme en son inverse avec la probabilité $1-p$. Chaque individu se comporte indépendamment des autres.
Calculer la probabilité p_n pour que l'information reçue par A_n soit identique à celle émise par A_1.
On suppose $0 < p < 1$. Quelle est la limite de p_n quand n tend vers l'infini ?

Exercice 26 (♣)

Dans un magasin de CD, 5 % des boîtes sont en mauvais état, 60 % des boîtes abîmées contiennent un CD défectueux, et 98 % des boîtes en bon état contiennent un CD en bon état. Un client achète un CD. On note A l'événement "la boîte achetée est abîmée" et D l'événement "le CD acheté est défectueux".

1. Calculer $P(A)$, $P(\overline{A})$, $P_A(D)$, $P_A(\overline{D})$, $P_{\overline{A}}(\overline{D})$ et $P_{\overline{A}}(D)$.
2. Calculer $P(D)$.
3. Le client constate que son CD est défectueux. Quelle est la probabilité qu'il ait acheté une boîte abimée ?

Exercice 27 (♥ ♦)

Soit $a \in]0; \dfrac{1}{2}[$. Dans une bourse de valeurs, un titre donné peut monter, rester stable, ou baisser. Le premier jour, le titre est stable.

- Si un jour n, le titre monte, le jour $n+1$, il montera avec la probabilité $1-2a$, restera stable avec la probabilité a et baissera avec la probabilité a.
- Si un jour n, le titre est stable, le jour $n+1$, il montera avec la probabilité a, restera stable avec la probabilité $1-2a$ et baissera avec la probabilité a.
- Si un jour n, le titre baisse, le jour $n+1$ il montera avec la probabilité a, restera stable avec la probabilité a et baissera avec la probabilité $1-2a$.

On note M_n (resp. S_n, resp. B_n) l'événement "le titre monte (resp. reste stable, resp. baisse) le jour n".
On pose $p_n = P(M_n)$, $q_n = P(S_n)$ et $r_n = P(B_n)$.

1. Expliciter p_{n+1} et q_{n+1}, en fonction de p_n, q_n et r_n.
2. Que vaut $p_n + q_n + r_n$? En déduire l'expression de r_n en fonction de p_n et q_n.
3. Montrer que les suites p et q sont arithmético-géométrique.
4. En déduire p_n, q_n puis r_n en fonction de n.

Exercice 28 (♥)

Première partie :

Soient $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et I_3 la matrice identié d'ordre 3.

1. On pose $J = M - I_3$. Calculer J^2 en fonction de J.
2. Montrer par récurrence qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels telle que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad M^n = I_3 + u_n J\,.$$
   Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.
4. Déterminer l'expression de M^n en fonction de n.

Deuxième partie :

Les poules pondent des œufs que l'on classe suivant trois calibres A,B, C.

- Si une poule pond un œuf de calibre A, l'œuf qu'elle pondra ensuite sera de calibre A, B, ou C avec des probabilités respectives $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{4}$ et $\dfrac{1}{4}$.
- Si une poule pond un œuf de calibre B, l'œuf qu'elle pondra ensuite sera de calibre A, B, ou C avec des probabilités respectives $\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{4}$.
- Si une poule pond un œuf de calibre C, l'œuf qu'elle pondra ensuite sera de calibre A, B, ou C avec des probabilités respectives $\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{1}{4}$ et $\dfrac{1}{2}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par a_n, b_n et c_n les probabilités respectives pour que le n-ième œuf pondu par une poule soit de calibre A, B ou C.

On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n. En déduire une matrice U telle que $X_{n+1} = UX_n$ pour tout entier n.
   (b) Exprimer U en fonction de M. En déduire U^n en fonction de n.
2. On suppose que le premier œuf pondu par une poule est de calibre C. Déduire des questions précédentes a_n, b_n et c_n en fonction de n, ainsi que leurs limites quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 29 (♣)

On lance un dé à six faces parfaitement équilibré. Justifier l'indépendance des événements A : « on obtient le tirage 2, 4 ou 6 » et B : « on obtient le tirage 3 ou 6 » .

Exercice 30 (♣)

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie. On note A_i l'événement « obtenir pile au i-ème lancer » pour $i \in \{1, 2, 3\}$. Montrer que les événements A_1, A_2 et A_3 sont mutuellement indépendants.

Exercice 31 (♣)

Dans une population de 10000 personnes, il y a 45% de fumeurs et 35% de personnes atteintes de bronchite. De plus, 65% des personnes ayant une bronchite sont fumeurs.

1. On choisit une personne au hasard dans cette population. Calculer la probabilité des événements suivants :
   - E_1 : "la personne choisie fume et a une bronchite",
   - E_2 : "la personne choisie ne fume pas et a une bronchite",
   - E_3 : "la personne choisie ne fume pas et n'a pas de bronchite".
2. Fumer et avoir une bronchite sont-ils des événements indépendants ?
3. On choisit une personne au hasard parmi les fumeurs. Calculer la probabilité que cette personne ait une bronchite.

Exercice 32 (♠)

Montrer qu'un événement A est indépendant de tout autre événement si, et seulement si, $P(A) = 0$ ou 1.

♣ Du trèfle à brouter...
♥ À connaître par coeur.

♠ Qui s'y frotte s'y pique !
♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau !