Correction du TD 10 : Limites et continuité

Table des matières

1 Exercice 6

1. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$, on doit donc déterminer les réels x tels que $x^2+4x \geqslant 0$. Or $x^2+4x = x(x+4)$ donc $x^2+4x \geqslant 0$ pour $x \in]-\infty,-4] \cup [0,+\infty[$. Ainsi $\mathcal{D}_f =]-\infty,-4[\cup]0,+\infty[$.

2. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+4x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc par composée et somme de limites $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

   Pour la limite de f en $-\infty$, on a, a priori, une forme indéterminée, factorisons l'expression par le terme prépondérant, on a :
$$f(x) = 2|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}} + x$$
   or x est au voisinage de $-\infty$ donc négatif, ainsi :
$$f(x) = x\left(-2\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1\right)$$
   On a $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+\dfrac{4}{x} = 1$ donc par composée et somme $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2\sqrt{1+\dfrac{4}{x}}+1\right) = -1$. Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$, par produit de limites, on a : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$.

   La fonction f étant définie en -4 et 0, on a $\boxed{\lim\limits_{x\to-4} f(x) = f(-4) = -4}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0}$.

3. Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (3x+4) = 0$.

   Soit $x > 0$, on a :
$$f(x) - (3x+4) = 2\sqrt{x^2+4x} + x - (3x+4) = 2\sqrt{x^2+4x} - (2x+4)$$
   On est face à une forme indéterminée, factoriser par le terme prépondérant ne permet pas de la lever. Multiplions alors par la quantité conjuguée, on obtient :
$$\begin{aligned}
f(x) - (3x+4) &= 2\sqrt{x^2+4x} - (2x+4) \times \frac{2\sqrt{x^2+4x}+(2x+4)}{2\sqrt{x^2+4x}+(2x+4)} \\
&= \frac{4(x^2+4x)-(2x+4)^2}{2\sqrt{x^2+4x}+(2x+4)} \\
&= \frac{4x^2+16x-4x^2-16x-16}{2\sqrt{x^2+4x}+(2x+4)} \\
&= \frac{-16}{2\sqrt{x^2+4x}+(2x+4)}
\end{aligned}$$
   Or $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\sqrt{x^2+4x}+(2x+4) = +\infty$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. On a donc montré que la droite d'équation $y = 3x+4$ était asymptote à la courbe au voisinage de $+\infty$.

4. Reprenons le calcul précédent, on a pour x au voisinage de $+\infty$:
$$f(x) - (3x+4) = \frac{-16}{2\sqrt{x^2+4x}+(2x+4)} < 0$$
   Ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de son asymptote Δ au voisinage de $+\infty$.

2 Exercice 7

1. La fonction $\sqrt{x^2+3x+k}$ est bien définie lorsque x est un réel tel que $x^2+3x+k \geqslant 0$.

   Le discriminant de x^2+3x+k est $\Delta_k = 9-4k$. On en déduit que

   Si $k \geqslant \dfrac{9}{4}$, alors $\Delta_k \leqslant 0$ et x^2+3x+k est toujours positif ou nul, donc $\mathcal{D}_k = \mathbb{R}$.

   Si $k < \dfrac{9}{4}$, alors $\Delta_k > 0$ et x^2+3x+k admet deux racines réelles
$$x_{1,k} = \frac{-3-\sqrt{9-4k}}{2} \qquad x_{2,k} = \frac{-3+\sqrt{9-4k}}{2}$$
   On a alors $\mathcal{D}_k =]-\infty, x_{1,k}] \bigcup [x_{2,k},+\infty[$.

2. Quelque soit k, $\mathcal{D}_k$ est bien symétrique par rapport à $\frac{-3}{2}$. Pour tout $x \in \mathcal{D}_k$,

$$\begin{aligned} f(-3-x) &= \sqrt{(-3-x)^2+3(-3-x)+k} \\ &= \sqrt{9+6x+x^2-9-3x+k} \\ &= \sqrt{x^2+3x+k} &= f(x) \end{aligned}$$

On en déduit que Γ_k est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{-3}{2}$. On peut donc réduire l'étude de f_k à la partie de $\mathcal{D}_k$ à droite de $\frac{-3}{2}$. On en déduit que
Si $k \geqslant \frac{9}{4}$, $\mathcal{E}_k = [\frac{-3}{2}, +\infty[$.
Si $k < \frac{9}{4}$, $\mathcal{E}_k = [x_{2,k}, +\infty[$.

3. Les théorèmes classiques nous assurent que f_k est dérivable au moins lorsque $x^2+3x+k > 0$. On a donc
Si $k > \frac{9}{4}$, $\mathcal{A}_k = [\frac{-3}{2}, +\infty[$.
Si $k = \frac{9}{4}$, $\mathcal{A}_k =]\frac{-3}{2}, +\infty[$.
Si $k < \frac{9}{4}$, $\mathcal{A}_k =]x_{2,k}, +\infty[$.

4. Pour tout $x \in \mathcal{A}_k$,

$$f_k'(x) = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+k}}.$$

On en déduit les trois tableaux de variations suivants :
Si $k > \frac{9}{4}$,

x	$\frac{-3}{2}$		$+\infty$
$f_k'(x)$	0	$+$	
f_k	$f_k(-\frac{3}{2})$	$\nearrow$	$+\infty$

f_k admet dans ce cas une tangente horizontale au point d'abscisse $\frac{-3}{2}$.
Si $k = \frac{9}{4}$,

x	$\frac{-3}{2}$		$+\infty$
$f_k'(x)$	$?$	$+$	
f_k	0	$\nearrow$	$+\infty$

Si $k < \frac{9}{4}$,

x	$x_{2,k}$	$+\infty$
$f_k'(x)$	? $\quad +$	
f_k	$0 \nearrow$	$+\infty$

5. Pour tout $x \in \mathcal{A}_k$,

$$\begin{aligned}
f_k(x) - x &= \sqrt{x^2+3x+k} - x \\
(f_k(x)-x)(\sqrt{x^2+3x+k}+x) &= (\sqrt{x^2+3x+k}-x)(\sqrt{x^2+3x+k}+x) \\
(f_k(x)-x)(\sqrt{x^2+3x+k}+x) &= x^2+3x+k-x^2 \\
f_k(x)-x &= \frac{3x+k}{\sqrt{x^2+3x+k}+x} \\
&= \frac{3+\frac{k}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{k}{x^2}}+1}
\end{aligned}$$

   On en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_k(x) - x = \frac{3}{2}\cdot$

6. On en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_k(x) - (x+\frac{3}{2}) = 0\cdot$. Donc Γ_k admet une asymptote oblique en $+\infty$ d'équation $y = x + \dfrac{3}{2}$.

7. Pour tout $x \in \mathcal{E}_k$,

$$f_k(x) = \sqrt{(x+\frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} + k}$$

   Donc, en posant $c_k = k - \dfrac{9}{4}$, on a bien $f_k(x) = \sqrt{(x+\frac{3}{2})^2 + c_k}$ pour tout $x \in \mathcal{E}_k$.

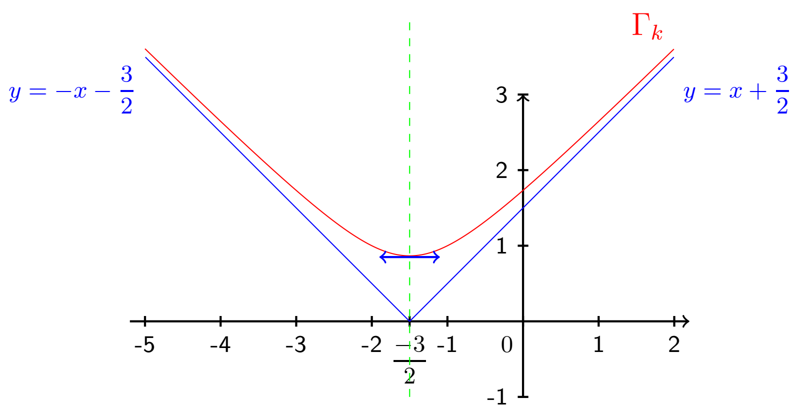
   On en déduit que :

   Si $k > \dfrac{9}{4}$, alors pour tout $x \in \mathcal{E}_k$, $f_k(x) > (x+\dfrac{3}{2})$, donc Γ_k est au-dessus de son asymptote en $+\infty$.

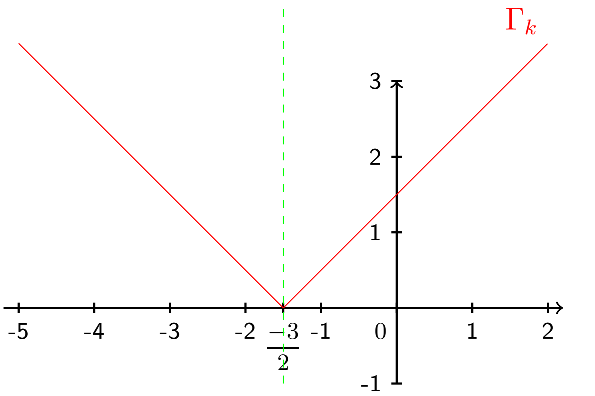
   Si $k = \dfrac{9}{4}$, alors pour tout $x \in \mathcal{E}_k$, $f_k(x) = (x+\dfrac{3}{2})$, donc Γ_k est confondue avec son asymptote en $+\infty$.

   Si $k < \dfrac{9}{4}$, alors pour tout $x \in \mathcal{E}_k$, $f_k(x) < (x+\dfrac{3}{2})$, donc Γ_k est en-dessous de son asymptote en $+\infty$.

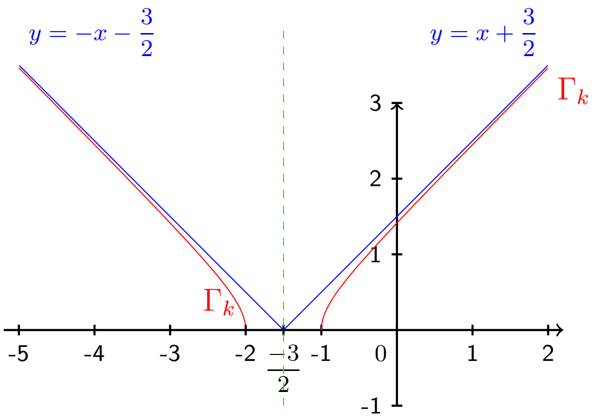
8. • Si $k > \dfrac{9}{4}$,



   • Si $k = \dfrac{9}{4}$,



• Si $k < \dfrac{9}{4}$,



3 Exercice 12

Pour que la fonction f soit continue en 1 il faut et suffit que :

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

Or d'une part, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \mathrm{e}Ax = \mathrm{e}A$, il faut donc que le réel A vérifie $\mathrm{e}^A = 2$ soit $A = \ln(2)$.

D'autre part, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x^2 + B = 1 + B$, il faut donc que le réel B vérifie $1 + B = 2$ soit $B = 1$.

En résumé, il faut choisir $A = \ln(2)$ et $B = 1$ pour que la fonction f soit continue en 1.

4 Exercice 18

Définissons sur $\mathbb{R}$ la fonction f telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2\mathrm{e}^x - 1$. La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x(2 + x).$$

Dressons alors le tableau de variations de la fonction f, en remarquant que pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$ et que donc le signe de $f'(x)$ dépend de $x(x + 2)$.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x			$-$		0	$+$	
$2+x$		$-$	0		$+$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	-1	$\nearrow$	$4\mathrm{e}^{-2}-1$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\mathrm{e}^x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$.

On remarque que $\mathrm{e}^2 \simeq (2,7)^2 > 4$ donc $4\mathrm{e}^{-2} < 1$ ainsi $4\mathrm{e}^{-2} - 1 < 0$. D'après l'étude des variations de f, on peut donc affirmer que pour tout $x \in]-\infty, 0]$, $f(x) < 0$ et que donc f ne s'annule pas sur cet intervalle.
De plus, $f(0) = -1 < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ donc comme f est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, on peut affirmer, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, que la fonction f s'annule une unique fois sur $[0, +\infty[$ i.e. que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0, +\infty[$ soit l'équation $x^2\mathrm{e}^x = 1$ admet une unique solution sur $[0, +\infty[$. Notons-la $\alpha \in [0, +\infty[$.

Calculons $f(1)$, on a : $f(1) = \mathrm{e}^1 - 1 = \mathrm{e} - 1 \simeq 1,7 > 0$. Ainsi on a :

$$f(0) < f(\alpha) = 0 < f(1)$$

comme la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que $\alpha \in [0, 1]$.

5 Exercice 19

1. On a $f(1) = 1 - 2 + \ln(1) = -1$ et $f(3) = 3 - 2 + \ln(3) = 1 + \ln(3)$. Ainsi $f(1) < 0 < f(3)$ et comme la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut en déduire, d'après le théorème des valeurs intermédiaires qu'elle s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]1, 3[$.
2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x}.$$

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{1}{x} >$ donc $f'(x) > 0$. Ainsi la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. D'après la question 1, on en déduit donc que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α dans $\mathbb{R}_+^*$/ On peut même préciser que $\alpha \in]1, 3[$.

6 Exercice 20

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables. On a pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{1}{x} >$ donc $f'(x) > 0$. Ainsi la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ car dérivable.
Ainsi f étant continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $f(\mathbb{R}_+^*)$.
Or on a $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ donc $f(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$.
2. Comme f est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$, tout réel $\mathbb{R}$ possède un unique antécédent par f. Ainsi comme $2005 \in \mathbb{R}$, il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(\alpha) = 2005$.

On a de plus $f(1997) = 1997 + \ln(1997) \simeq 2004,6$ et $f(1998) = 1998 + \ln(1998) \simeq 2005,6$ donc :

$$f(1997) < 2005 = f(\alpha) < f(1998)$$

comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que $\alpha \in [1997, 1998]$.

7 Exercice 21

1. (a) La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme la fonction racine est définie sur $\mathbb{R}_+$, il faut également que $2-\ln(x) \geqslant 0$ soit $x \leqslant \mathrm{e}^2$. Ainsi $\boxed{\mathcal{D}_f =]0, \mathrm{e}^2]}$.
   La fonction $x \mapsto 2-\ln(x)$ est continue sur $\mathcal{D}_f$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et la fonction racine est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc par composée f est continue sur $\mathcal{D}_f$.

   (b) Comme f est définie en e^2 on a $\boxed{\lim\limits_{x \to \mathrm{e}^2} f(x) = f(\mathrm{e}^2) = 0}$.
   On a $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} 2-\ln(x) = +\infty$. De plus $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc par composée de limites, $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty}$.

   (c) La fonction $x \mapsto 2-\ln(x)$ est dérivable sur $]0, \mathrm{e}^2[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction racine est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par composée f est dérivable sur $]0, \mathrm{e}^2[$.
   On a pour $x \in]0, \mathrm{e}^2[$, $f'(x) = \dfrac{\frac{-1}{x}}{2\sqrt{2-\ln(x)}} = \dfrac{-1}{2x\sqrt{2-\ln(x)}}$.
   Pour tout $x \in]0, \mathrm{e}^2[$, $\sqrt{2-\ln(x)} > 0$ et $x > 0$, ainsi $f'(x) < 0$ sur $]0, \mathrm{e}^2[$ et f est décroissante.
   On a alors le tableau de variations suivant :

x	0		e^2
$f'(x)$	||	$-$	
f	||	$+\infty$ ↘	0

2. (a) Comme f est décroissante sur $]0, \mathrm{e}^2]$ et que $[1, \mathrm{e}] \subset]0, \mathrm{e}^2]$, on a :
$$f([1, e]) = [f(\mathrm{e}), f(1)]$$
   Or $f(1) = \sqrt{2}$ et $f(\mathrm{e}) = 1$ donc
$$f([1, e]) = [1, \sqrt{2}] \subset [1, \mathrm{e}] \quad \text{car } \sqrt{2} < \mathrm{e}.$$
   Ainsi l'intervalle $[1, \mathrm{e}]$ est bien stable par f.

   (b) Soit $x \in]0, \mathrm{e}^2]$, on a :
$$f(x) = x \iff \sqrt{2-\ln(x)} = x \iff 2-\ln(x) = x^2 \text{ car } x > 0 \iff x^2 + \ln(x) - 2 = 0.$$

   (c) Posons pour $x \in [1, \mathrm{e}]$, la fonction g définie par $g(x) = f(x) - x$. La fonction g est décroissante sur $[1, \mathrm{e}]$ comme somme de fonctions décroissantes. Elle est continue comme somme de fonctions continues et on a :
$$g(1) = \sqrt{2} - 1 > 0 \quad \text{et} \quad g(\mathrm{e}) = 1 - \mathrm{e} < 0$$
   Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction g s'annule une unique fois sur $[1, \mathrm{e}]$. Ainsi l'équation $x^2 + \ln(x) - 2 = 0$ ne possède qu'une solution sur l'intervalle $[1, \mathrm{e}]$.

8 Exercice 22

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0. Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$f(-x) = \frac{\mathrm{e}^{-x} - 1}{\mathrm{e}^{-x} + 1} = \frac{\frac{1}{\mathrm{e}^x} - 1}{\frac{1}{\mathrm{e}^x} + 1} = \frac{1 - \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x} \times \frac{\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^x} = \frac{1 - \mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^x} = -\frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1} = f(x).$$
   La fonction f est donc impaire.

Les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^x - 1$ et $x \mapsto \mathrm{e}^x + 1$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, de plus pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x + 1 \neq 0$ ainsi la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+1) - (\mathrm{e}^x-1)\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = \frac{2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2\mathrm{e}^x > 0$ et $(\mathrm{e}^x + 1) > 0$ donc $f'(x) > 0$ et la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$. De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$. Pour la limite en $+\infty$, on a une forme indéterminée, il nous faut donc factoriser par le terme prépondérant, on a :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x(1 - \frac{1}{\mathrm{e}^x})}{\mathrm{e}^x(1 + \frac{1}{\mathrm{e}^x})} = \frac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{1 + \mathrm{e}^{-x}}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.
Ainsi la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$.

3. Soit $y \in]-1,1[$, on cherche un réel x tel que $y = f(x)$. On a les équivalences suivantes :

$$y = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1} \iff y(\mathrm{e}^x+1) = \mathrm{e}^x - 1 \iff \mathrm{e}^x(y-1) = -1-y \iff \mathrm{e}^x = \frac{-1-y}{y-1} = \frac{y+1}{1-y} \quad \text{car } y - 1 \neq 0$$

Or $y \in]-1,1[$ donc $\frac{y+1}{1-y} > 0$ ainsi $x = \ln\left(\frac{y+1}{1-y}\right)$. On en déduit alors l'expression de f^{-1}.

$$\forall y \in]-1,1[, \quad f^{-1}(y) = \ln\left(\frac{y+1}{1-y}\right)$$

4. Voici les courbes des fonctions f et f^1. On remarque qu'elles sont bien symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.