Limites et continuité

Exercice 1 (♣)

Calculer les limites suivantes (on distinguera éventuellement les limites à gauche et à droite) :

1. $\lim_{x\to+\infty}(x^2-\sqrt{x})$
2. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(x)}{x^3}$
3. $\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2+x+1}{x}$
4. $\lim_{x\to+\infty} x^4 e^{-x}$
5. $\lim_{x\to-\infty}(3+x^2)e^{x}$
6. $\lim_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{1}{x^2-4}}$
7. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$
8. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-x+1}{x+\ln(x)}$
9. $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2+2x+2}\right)$
10. $\lim_{x\to\pm\infty}(x^3-e^{2x})$
11. $\lim_{x\to-1}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$
12. $\lim_{x\to 1}\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$
13. $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}(1+\sqrt{x})$
14. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-1}{x-1}$
15. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}\ln(x)}{x+1}$
16. $\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$
17. $\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$
18. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\lfloor x\rfloor}{\pi x}$

Exercice 2 (♣)

A l'aide d'un changement de variable, déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (poser $X=\dfrac{1}{x}$)
2. $\lim_{x\to 1}\dfrac{1}{\ln(x)}\exp\left(\dfrac{1}{\ln(x)}\right)$ (poser $X=\dfrac{1}{\ln(x)}$)
3. $\lim_{x\to 3}\dfrac{e^{\frac{1}{x-3}}}{x^2-5x+6}$ (poser $X=\dfrac{1}{x-3}$)

Exercice 3 (♠)

Déterminer les limites suivantes (on distinguera éventuellement les limites à gauche et à droite) :

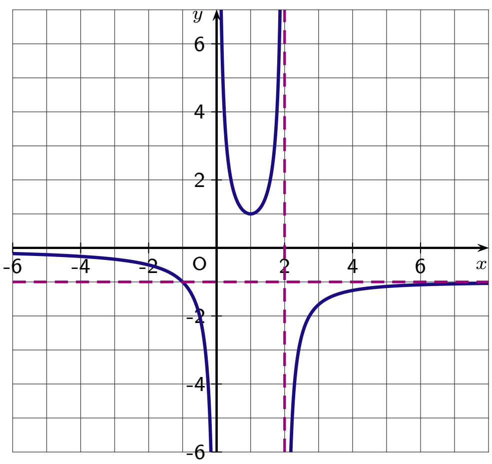
1. $\lim_{x\to 0} x^x$
2. $\lim_{x\to 1}(\ln(x))^{\ln(x)}$
3. $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$

Exercice 4 (♣)

La courbe ci-dessous, représentative d'une fonction f, admet les quatre asymptotes suivantes :

- deux asymptotes horizontales d'équations respectives $y=-1$ et $y=0$;
- deux asymptotes verticales d'équations respectives $x=0$ et $x=2$.

Déterminer $\lim_{x\to-\infty}f(x)$, $\lim_{x\to+\infty}f(x)$, $\lim_{x\to0^-}f(x)$, $\lim_{x\to2^+}f(x)$, $\lim_{x\to0^+}f(x)$, $\lim_{x\to2^-}f(x)$



Exercice 5 (♣)

Calculer les limites des fonctions suivantes aux bornes de leurs intervalles de définition (que l'on aura préalablement déterminé) et préciser si leurs courbes représentatives admettent des asymptotes verticales ou horizontales :

1. $f(x)=x-\ln(x)$
2. $g(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}$
3. $h(x)=\dfrac{x^2-4}{-x^2+3x-2}$

Exercice 6 (♥)

On considère la fonction f définie par

$$f(x)=2\sqrt{x^2+4x}+x.$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

3. Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet en $+\infty$ la droite Δ d'équation $y = 3x + 4$ comme asymptote oblique.
4. Déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Δ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 7 (♠)

Soit k un réel fixé.
On considère la fonction $f_k : x \mapsto \sqrt{x^2 + 3x + k}$.

1. Déterminer le domaine $\mathcal{D}_k$ de définition de f_k.
2. Montrer que la courbe représentative Γ_k de f_k a la droite d'équation $x = -\dfrac{3}{2}$ pour axe de symétrie. En déduire un domaine d'étude $\mathcal{E}_k$ de la fonction.
3. Sur quel partie $\mathcal{A}_k$ de $\mathcal{E}_k$ les théorèmes classiques assurent-ils que f est dérivable ? Calculer f' sur $\mathcal{A}_k$.
4. Dresser le tableau des variations de f_k sur $\mathcal{E}_k$. Préciser les tangentes horizontales éventuelles.
5. Calculer la limite de $f_k(x) - x$ lorsque x tend vers $+\infty$.
6. En déduire qu'il existe un réel a tel que $f_k(x) - (x + a)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. En déduire que Γ_k possède une asymptote dont on précisera une équation.
7. Montrer qu'il existe $c_k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathcal{E}_k$
$$f_k(x) = \sqrt{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + c_k}.$$
En déduire la position de Γ_k par rapport à la droite d'équation $y = x + \dfrac{3}{2}$.
8. Tracer Γ_k.

Exercice 8 (♣)

Etudier la continuité au point x_0 des fonctions suivantes :

1. $x_0 = 2$ et $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 2, \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$
2. $x_0 = 0$ et $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{1 + e^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x \neq 0, \\ 2 & \text{si } x = 0. \end{cases}$
3. $x_0 = 3$ et $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3} & \text{si } x \neq 3, \\ 5 & \text{si } x = 3. \end{cases}$
4. $x_0 = 0$ et $f(x) = \begin{cases} x \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \\ \ln(x) & \text{si } x > 0. \end{cases}$
5. $x_0 = 0$ et pour $x \in]-1; +\infty[$,
$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)\ln(1 + x)}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$
Indication : On pourra pense au taux d'accroissement

Exercice 9 (♣)

Déterminer l'ensemble de définition et de continuité des fonctions suivantes, puis chercher si elles admettent un prolongement par continuité aux bornes de leur ensemble de définition.

1. $f_1(x) = \dfrac{x^3 + 5x + 6}{x^3 + 1}$
2. $f_2(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$
3. $f_3(x) = \dfrac{x^2}{|x|}$
4. $f_4(x) = \dfrac{2}{x - 2} - \dfrac{3}{(x - 2)^2}$
5. $f_5(x) = \dfrac{x \ln(x)}{x + 1}$
6. $f_6(x) = \sin(x) \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Exercice 10 (♣)

1. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad 1 + x \leq e^x \leq 1 + x e^x.$$
2. En déduire $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$.
3. La fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Exercice 11 (♣)

Soit f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par :
$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}$$
La fonction f est-elle prolongeable par continuité ?

Exercice 12 (♥)

Soit f la fonction définie par :
$$f(x) = \begin{cases} e^{Ax} & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \\ x^2 + B & \text{si } x > 1 \end{cases}$$
Déterminer les réels A et B de sorte que la fonction f soit continue en 1.

Exercice 13 (♣)

Montrer que les équations suivantes ont au moins une solution dans l'intervalle I :

1. $\ln(x) = 2 - x$ sur $I = [1; 2]$.
2. $x^{2018} - x^{2019} = 1$ sur $I = [-1; 1]$.
3. $x \ln(x) = 2$ sur $I = [2; 3]$.

Exercice 14 (♣)

Montrer que toute fonction polynomiale de degré impair s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15 (♣)

Montrer que l'équation
$$x^3 - 3x + 1 = 0$$
admet au moins une solution dans l'intervalle $[-1; 1]$.

Exercice 16 (♠)

1. Soit $f : [0;1] \longrightarrow [0;1]$ continue. On pose $\varphi(x) = f(x) - x$.
   (a) Montrer que $\varphi(0) \geq 0$ et $\varphi(1) \leq 0$.
   (b) En déduire qu'il existe $c \in [0;1]$ tel que $f(c) = c$.
2. Soient $f, g : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que $f(0) \leq g(0)$ et $f(1) \geq g(1)$.
   (a) On pose $\varphi(x) = f(x) - g(x)$. Déterminer le signe de $\varphi(0)$ et de $\varphi(1)$.
   (b) En déduire qu'il existe $c \in [0;1]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Exercice 17 (♠)

Soit f une fonction continue de $[0;1]$ dans $[0;1]$. Montrer qu'il existe $x \in [0;1]$ tel que $f(x) = x$.

Exercice 18 (♥)

Montrer que l'équation $x^2 e^x = 1$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$. Vérifier que $\alpha \in [0;1]$.

Exercice 19 (♥)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = x - 2 + \ln(x)$$

1. Calculer $f(1)$ et $f(3)$. Que peut-on en déduire ?
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 20 (♥)

On considère la fonction $f(x) = x + \ln(x)$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle à expliciter.
2. Justifier que l'équation $x + \ln(x) = 2005$ admet une unique solution α sur $]0; +\infty[$ et vérifier qu'on a l'encadrement : $1997 \leq \alpha \leq 1998$.
   Valeurs numériques : $\ln(1997) \simeq \ln(1998) \simeq 7.6$.

Exercice 21 (♥)

On considère la fonction $f(x) = \sqrt{2 - \ln(x)}$.

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f. La fonction f est-elle continue sur $\mathcal{D}_f$?
   (b) Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.
   (c) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
2. (a) Montrer que l'intervalle $[1; e]$ est stable par f, c'est à dire : $\forall x \in [1; e]$, $f(x) \in [1; e]$.
   (b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ est équivalente à l'équation $x^2 + \ln(x) - 2 = 0$.
   (c) En déduire que l'équation $x^2 + \ln(x) - 2 = 0$ ne possède qu'une seule solution sur l'intervalle $[1; e]$.

Exercice 22 (♥)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

1. Etudier les variations de f. On étudiera également sa parité.
2. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à déterminer.
3. Soit $y \in J$. Déterminer un antécédent de y par f. En déduire l'expression de f^{-1}.
4. Tracer dans un même repère orthonormé les courbes représentatives de f et de f^{-1}.

Exercice 23 (♠)

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $xe^x = n$ admet une unique solution que l'on noter x_n.
2. Etudier la limite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 24 (♠)

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on définit la fonction f_n par :

$$f_n(x) = nx - e^{-x}.$$

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ que l'on notera u_n.
2. Calculer $f_n(0)$ et $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)$. En déduire un encadrement de u_n puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
3. Montrer que $nu_n = e^{-u_n}$ et en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} nu_n$.

Exercice 25 (♠)

Soit la fonction $f : x \mapsto \left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{x-1} - \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{x+1}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Vérifier que f est impaire.
3. Montrer que f admet un prolongement par continuité en -1 et en 1.
4. Etudier la limite de f en $+\infty$.
5. Déterminer la dérivée de la fonction f.

♣ Du trêfle à brouter...
♥ À connaître par coeur.
♠ Qui s'y frotte s'y pique !
♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau !