Rappels et logique

Exercice 1 (♣)

Donner l'écriture des nombres suivants sous la forme d'un entier ou d'une fraction irréductible.

$$A = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$
$$B = 2 - \frac{13}{7} - \left(1 + \frac{5}{2}\right)$$
$$C = \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right) + 3\left(\frac{4}{5} - \frac{5}{6}\right),$$
$$D = \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{3}\right) \times \left(3 + \frac{7}{4}\right) : \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{6}\right)$$
$$E = \frac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} \times \frac{3}{4}}{\frac{2}{5} \times \frac{4}{3} + \frac{1}{3}}$$

Exercice 2 (♣)

Ecrire les nombres suivants sous la forme d'une unique fraction la plus simple possible.

$$A = \frac{3(x+1)}{2(x+1)(x+2)}$$
$$B = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$$
$$C = \frac{1}{2x-1} + \frac{x}{x+1} + \frac{x^2}{4x-2}$$
$$D = \frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-2} + \frac{8}{x^2-4}$$

Exercice 3 (♣)

Simplifier les nombres suivants : $A = 3^2 \times 3^{-4} \times 3^7 \times 3$

$B = \dfrac{2 \times 2^2 \times 2^3}{2^4 \times 2^5}$

$C = (2 \times 3^2 \times 3^3)^4$

$D = \dfrac{2^3 \times 5^4 \times 7^3}{5^3 \times 7^2 \times 2}$

$E = 81^5 \times (3^{-2})^{-5} \times \dfrac{1}{9}$

$F = \dfrac{4^{-2} \times 8^3}{16^3}$

$G = \dfrac{9^3 \times 27^2 \times 75}{5^2 \times 3^4}.$

$H = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{11} \times \left(\dfrac{3}{2}\right)^{10}$

$I = (a^3)^2 \times a^{-4}$

$J = a^2 b^{-3} (ab)^4$

Exercice 4 (♣)

Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$A = \sqrt{12}$

$B = \sqrt{48}$

$C = \sqrt{36+64}$

$D = 3\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$

$E = 5\sqrt{27} - 2\sqrt{48}$

$F = \dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt{242}} \times \sqrt{\dfrac{98}{25}}$

$G = \dfrac{3}{\sqrt{3}}.$

$H = (2 - \sqrt{3})^2$

$I = 3(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})$

Exercice 5 (♠)

Soit $\mathbb{K}$ l'ensemble des nombres réels de la forme $a + b\sqrt{2}$ avec $(a,b) \in \mathbb{Q}^2$. Montrer que, si x et y sont dans $\mathbb{K}$, il en est de même de $x - y, xy$ et, si $x \neq 0$, de $\dfrac{1}{x}$.

Exercice 6 (♣)

Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes :

$$A(x) = 4(2x+5) + (x-3)(5x-7),$$
$$B(x) = (2x-3)^2 - (4x+1)(x-3),$$
$$C(x) = (x-3)(x+3) - (-3x+2)(x-5),$$
$$D(x) = (-2x-4)^2(-x+1).$$

Exercice 7 (♣)

Factoriser au maximum les expressions suivantes :

$$A(x) = (2x-5)(7+3x) - (2x-5)(3x-2)$$
$$B(x) = (x-3)(3x+5) + (9x^2+30x+25),$$
$$C(x) = 3(x+3)(2x+3) - (4x^2-9),$$
$$D(x) = (2x-1)^2 - (3-5x)^2.$$

Exercice 8 (♣)

Résoudre les équations suivantes :

1. $5x - 9 = 3x + 4,$
2. $x - \dfrac{2}{3} = \dfrac{3}{4},$
3. $\dfrac{4}{5}x + 4 = -\dfrac{2}{3},$
4. $4(x-2) - 3[6 - 2(3-4x)] + 3(7-2x) = 0.$

Exercice 9 (♣)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et factoriser si possible le trinôme du second degré associé.

1. $x^2 + 5x + 6 = 0,$
2. $x^2 + x + 1 = 0,$
3. $-2x^2 + 3x + 1.$

Exercice 10 (♣)

Résoudre les équations suivantes en factorisant (sans utiliser le discriminant).

1. $x^2 - 9 + 3(x-3) = 0$
2. $(2x-1)^3 = (2x-1)$

Exercice 11 (♠)

Résoudre les équations suivantes.

1. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
2. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
3. $9x^4 - 85x^2 + 196 = 0$
4. $x^4 - x^2 - 2 = 0$
5. $x^2 + \dfrac{1}{x^2} - 6 = 0$

Exercice 12 (♥)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\dfrac{x-4}{x+4} = 0$
2. $\dfrac{x-2}{x-3} = x-1$
3. $\dfrac{x^2-x}{x-1} = 2x+3$
4. $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x^2}$
5. $\dfrac{x+2}{x+1} + 4 = \dfrac{5x}{x+2}$

Exercice 13 (♥)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$\frac{7x-5}{x^2+2x+1} = 1.$$

Exercice 14 (♣)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\sqrt{x-3} + 2 = 9$
2. $3\sqrt{x+3} - 6 = x - 2$

Exercice 15 (♣)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $2x + 1 > 0$,
2. $-6x + 3 < 0$,
3. $-x + 1 < 2x - \dfrac{1}{2}$.

Exercice 16 (♣)

Résoudre les inéquations suivantes.

1. $x^2 - 2x + 1 > 0$
2. $-3x^2 + 5x - 2 \leq 0$
3. $x^2 - 4x - 4 \geq 0$
4. $-2x^2 + 5x \leq 2$

Exercice 17 (♥)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\dfrac{x-4}{x+4} > 0$,
2. $\dfrac{x+2}{x+1} + 4 \leqslant \dfrac{5x}{x+2}$.

Exercice 18 (♣)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\sqrt{2x-5} \leq 5$
2. $\sqrt{2+x} \leq -1$
3. $\sqrt{-(x-5)} \geq x+1$

Exercice 19 (♥)

1. Montrer l'inégalité suivante :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \geq x + 1.$$
2. (♠) En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0; \sqrt{n}],\ \mathrm{e}^{t^2}\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq 1.$$

Exercice 20 (♥)

1. Montrer que pour tous nombres réels a et b, on a : $ab \leq (a^2 + b^2)/2$.
2. En déduire que pour tous nombres réels a, b et c, on a :
$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc.$$

Exercice 21 (♣)

On considère un intervalle E de $\mathbb{R}$ et les propositions suivantes :

- A : $(\forall x \in E,\ x \geq 2)$,
- B : $(\exists x \in E,\ x > 1)$,
- C : $(\forall x \in E,\ \exists y \in E,\ x + y = 2)$.

1. Nier les propositions A, B et C.
2. On suppose dans cette question que $E = [0; 4]$. Pour chacune des propositions A, B et C, dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant soigneusement votre réponse.
3. Même question avec l'intervalle $E = [-1; 3]$.

Exercice 22 (♥)

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses puis les nier.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x = \ln(\mathrm{e}^x)$
2. $\exists x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x} = -x$
3. $\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall x' \in \mathbb{R}, (x \neq x') \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

Exercice 23 (♣)

Ecrire avec les quantificateurs et connecteurs appropriés les assertions suivantes :

1. La fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Il n'existe pas d'entier naturel supérieur à tous les autres.
3. Si la somme de deux entiers naturels est nulle, alors ces deux entiers sont nuls.
4. Il existe un unique réel x tel que $\exp(x) = 1$.
5. La fonction P définie par $P(x) = x^2 + 1$ ne possède pas de racine réelle.

Exercice 24 (♥)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Écrire,à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par le nombre réel 4 ;
2. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée ;
3. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ;
4. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée ;
5. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante ;
6. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ;
7. la suite est stationnaire (c'est-à-dire constante à partir d'un certain rang).

Exercice 25 (♣)

Montrer que la proposition ($\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n \geq n^2$) est fausse.

Exercice 26 (♣)

Est-il vrai que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2} = x?$$

Exercice 27 (♥)

Montrer que pour tout nombre réel x différent de -3, on a :

$$\frac{x+1}{x+3} \neq 1.$$

Exercice 28 (♣)

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)$ est pair.

Exercice 29 (♣)

Le but de cet exercice est de montrer que $\sqrt{2}$ n'appartient pas à $\mathbb{Q}$.
Raisonnons par l'absurde et supposons pour cela qu'il existe deux entiers p et q (avec $q \geq 1$) tels que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$. On les suppose de plus choisis de telle sorte que la fraction soit irréductible.

1. Justifier que p^2 est pair puis montrer que p est pair.
2. En écrivant p sous la forme $2p'$, avec p' élément de $\mathbb{N}$, montrer que q est lui-même pair.
3. Conclure.

Exercice 30 (♠)

Montrer que si $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 4, alors n est pair.

Exercice 31 (♣)

Soit f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1 + \mathrm{e}^{-x}}{1 + \mathrm{e}^{x}}.$$

Montrer que f n'est ni paire, ni impaire.

Exercice 32 (♠)

Déterminer l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

Indication : Montrer que $f(0) = 1$.

Exercice 33 (♠♠)

On se place sur le territoire des gibbons du Parc de Sainte-Croix. On note $\mathcal{G}$ l'ensemble des gibbons et $\mathcal{B}$ l'ensemble des bananes. Pour tous g et h des gibbons et b une banane, on définit l'assertion

$T(g,b,h)$: « Le gibbon g lance la banane b au gibbon h. »

Chaque assertion mathématique de gauche (repérée par les nombres de 1 à 12) correspond à une description à droite (repérées par les lettres de a à l).
Retrouvez les associations entre les assertions et les descriptions.

1. $\forall b \in \mathcal{B},\ \exists g \in \mathcal{G},\ \exists h \in \mathcal{G},\ T(g,b,h)$	a. Folie gibbonienne totale !
2. $\exists g \in \mathcal{G},\ \exists h \in \mathcal{G},\ \forall b \in \mathcal{B},\ T(g,b,h)$	b. Rugby gibbon.
3. $\exists g \in \mathcal{G},\ \exists b \in \mathcal{B},\ \exists h \in \mathcal{G},\ T(g,b,h)$	c. Que toutes les bananes soient lancées !
4. $\exists g \in \mathcal{G},\ \exists b \in \mathcal{B},\ \forall h \in \mathcal{G},\ T(g,b,h)$	d. Un gibbon en aime vraiment un autre.
5. $\exists g \in \mathcal{G},\ \forall b \in \mathcal{B},\ \exists h \in \mathcal{G},\ T(g,b,h)$	e. Un gibbon distribue le déjeuner.
6. $\exists g \in \mathcal{G},\ \forall b \in \mathcal{B},\ \forall h \in \mathcal{G},\ T(g,b,h)$	f. Regardez la jolie banane !
7. $\forall g \in \mathcal{G},\ \exists b \in \mathcal{B},\ \exists h \in \mathcal{G},\ T(g,b,h)$	g. Au moins un jet de banane.
8. $\forall g \in \mathcal{G},\ \exists b \in \mathcal{B},\ \forall h \in \mathcal{G},\ T(g,b,h)$	h. Chaque gibbon lance chaque banane.
9. $\forall g \in \mathcal{G},\ \forall b \in \mathcal{B},\ \exists h \in \mathcal{G},\ T(g,b,h)$	i. Le quarterback gibbon s'entraine avec toutes les bananes : Tous les autres les rattrapent.
10. $\forall g \in \mathcal{G},\ \forall b \in \mathcal{B},\ \forall h \in \mathcal{G},\ T(g,b,h)$	j. Service de livraison : Un des gibbons livre toutes les bananes.
11. $\exists g \in \mathcal{G},\ \forall h \in \mathcal{G},\ \exists b \in \mathcal{B},\ T(g,b,h)$	k. Que tout le monde lance une banane !
12. $\exists b \in \mathcal{B},\ \forall g \in \mathcal{G},\ \forall h \in \mathcal{G},\ T(g,b,h)$	l. Exposé gibbon : Chaque gibbon montre sa banane préférée à tout le monde.

♣ Du trèfle à brouter...
♥ À connaître par coeur.
♠ Qui s'y frotte s'y pique !
♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau !