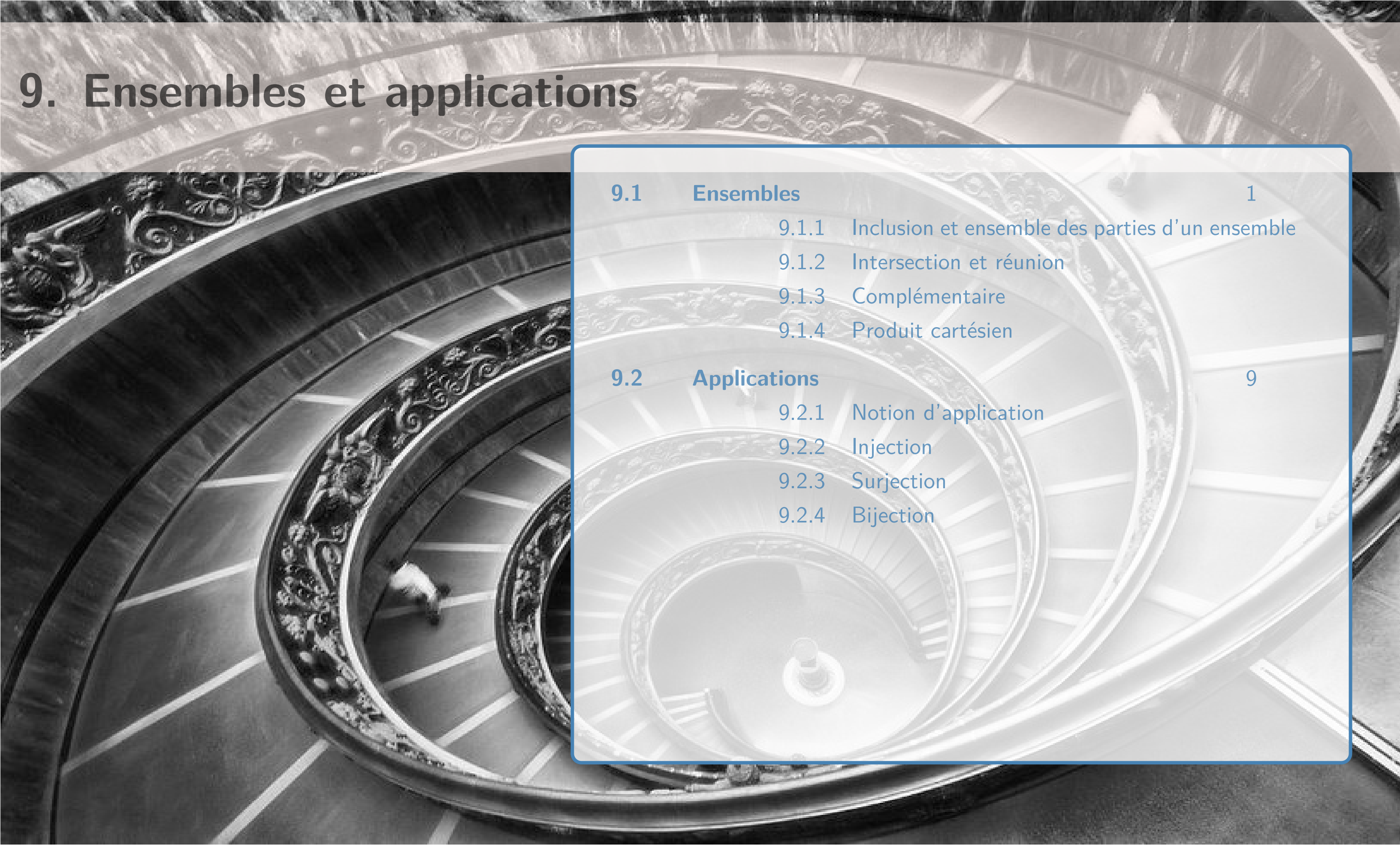
9. Ensembles et applications



Les mathématiques ne sont pas une moindre immensité que la mer.

Victor Hugo

L'objectif de ce chapitre est d'introduire le vocabulaire élémentaire sur les ensembles : appartenance, inclusion, réunion, intersection, complémentaire... ainsi que le vocabulaire élémentaire sur les applications : injection, surjection, bijection...

9.1 Ensembles

9.1.1 Inclusion et ensemble des parties d'un ensemble

Définition 9.1
- Un **ensemble** E est une collection ou un groupement d'objets distincts. Les objets x de E s'appellent les **éléments** de E.
- Si E est un ensemble et si x est un élément de E, on dit que x **appartient** à E et on écrit $x \in E$.
  Dans le cas contraire, si x n'est pas un élément de E, on dit que x **n'appartient pas** à E et on écrit $x \notin E$.

Pour définir un ensemble, on peut le décrire :

- en donnant entre accolades la liste de ses éléments.
  Par exemple, $E = \{0, 2, 4, 6, 8...\}$ est l'ensemble des entiers naturels pairs.
- en donnant entre accolades une propriété caractéristique des éléments.
  Par exemple, $E = \{n \in \mathbb{N} \quad | \quad n \text{ impair}\}$ est l'ensemble des entiers relatifs impairs.

Définition 9.2

- Soient A et B deux ensembles. On dit que A est **inclus** dans B et on écrit $A \subset B$ si tout élément de A est un élément de B *i.e.*

$$\forall x \in A, \qquad x \in B$$

On dit que A est un **sous-ensemble** de B ou encore que A est une **partie** de B.

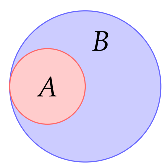
On dit aussi que B **contient** A et on note parfois $B \supset A$.

- On note $A \subsetneq B$ si A est **strictement inclus** dans B, c'est à dire si $A \subset B$ et s'il existe un élément de B qui n'appartient pas à A. On dit alors que A est un **sous-ensemble propre** de B.

- Les ensembles A et B sont **égaux** si et seulement si $A \subset B$ et $B \subset A$. On note alors $A = B$.

Exemple 9.1 $\emptyset \subsetneq \mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$.

Diagramme de Venn. Ce sont des représentations schématiques d'ensembles. Par exemple, on peut schématiser l'inclusion $A \subset B$ de la façon suivante :



<u>*Remarque*</u> *: En utilisant des quantificateurs, on a:*

$$A \subset B \iff \forall x \in A, x \in B \quad \text{et} \quad A \not\subset B \iff \exists x \in A, x \notin B.$$

Exemple 9.2 On considère les ensembles suivants :

$$A = \{1, 5, a, \Delta\}, \quad B = \{1, a, \Delta\}, \quad C = \{1, 5\}, \quad D = \{5, a, \Delta\}, \quad E = \{1, 2, 5, \Delta\}.$$

Cherchons les différentes inclusions entre ces ensembles.

On a $B \subset A$, $C \subset A$, $D \subset A$ et $C \subset E$.

Méthode 9.1

- Pour montrer une inclusion $A \subset B$, on prend un élément quelconque de A et on essaie de démontrer qu'il appartient à B.

- Pour montrer l'égalité de deux ensembles A et B, on procède souvent par double-inclusion, en démontrant que $A \subset B$ puis que $B \subset A$.

Exemple 9.3 Soit $E = \{\text{suites géométriques de raison } -1 < q < 1\}$ et $F = \{\text{suites convergentes}\}$. Montrons que $E \subset F$.

Soit $(u_n)_n \in E$, la suite $(u_n)_n$ est donc géométrique de raison $q \in]-1;1[$ donc elle converge. Ainsi $(u_n)_n \in F$.

Exercice 9.1 On considère les ensembles:

$$T = \{x \in \mathbb{R} | (x-1)(x-3) \geqslant 0\} \text{ et } S = \{x \in \mathbb{R} | x \geqslant 3\}.$$

Montrer que $S \subsetneq T$.

Soit $x \in S$, on a donc $x \geqslant 3$. Ceci implique que $x-3 \geqslant 0$ et que donc $x-1 \geqslant 0$. Ainsi $(x-1)(x-3) \geqslant 0$ et $x \in T$.
Montrons que cette inclusion est stricte. Pour cela exhibons un élément de T qui n'est pas dans S. On a $0 \in T$. En effet,

$$(0-1)(0-3) = 3 \geqslant 0.$$

Et pourtant $0 \not\geqslant 3$. Ainsi $S \subsetneq T$.

Proposition 9.1 Soient A, B et C trois ensembles. Alors:

- Si $A \subset B$ et $B \subset C$ alors $A \subset C$.
- $A \subset A$.
- $\emptyset \subset A$.

Démonstration. Démontrons le premier point.
Supposons que $A \subset B$ et $B \subset C$. Soit $x \in A$. Comme $A \subset B$, alors $x \in B$. Et comme $B \subset C$, on a aussi $x \in C$. Donc pour tout $x \in A$, on a aussi $x \in C$. Ce qui implique que $A \subset C$. □

Définition 9.3 Soit E un ensemble. L'ensemble des parties de E, noté $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble dont les éléments sont tous les sous-ensembles de E. Autrement dit:

$$X \in \mathcal{P}(E) \iff X \subset E$$

Exemple 9.4

- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- $\mathcal{P}(\{7\}) = \{\emptyset, \{7\}\}$
- $\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$
- $\mathcal{P}(\{a,b,c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$

Attention ! Il est important de bien distinguer les deux symboles $\in$ et $\subset$: le premier concerne un élément appartenant à un ensemble, le second concerne un ensemble inclus dans un autre ensemble.
Soient A et E deux ensembles, on écrira $A \subset E$ mais $A \in \mathcal{P}(E)$ car $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble d'ensembles et ses éléments sont donc des ensembles.

9.1.2 Intersection et réunion

Définition 9.4 Soit E un ensemble, soient A et B deux sous-ensembles de E.

- La **réunion** des ensembles A et B est le sous-ensemble de E constitué des éléments qui sont dans A ou dans B, noté $A \cup B$:

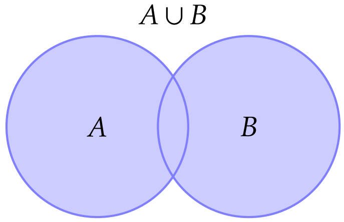
$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

- L'**intersection** des ensembles A et B est le sous-ensemble de E constitué des éléments qui sont à la fois dans A et dans B, noté $A \cap B$:

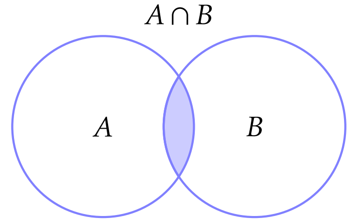
$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

Diagrammes de Venn.

$A \cup B$



$A \cap B$



<u>Remarque</u> : Soient A et B deux sous-ensembles de E. Alors on a toujours les inclusions suivantes :

$$A \cap B \subset A \subset A \cup B \quad \text{et} \quad A \cap B \subset B \subset A \cup B.$$

*Lorsque deux sous-ensembles de E vérifient $A \cap B = \emptyset$, on dit que les ensembles A et B sont **disjoints**.*

Exemple 9.5 $]-5;2[\cup]1;4] =]-5;4]$ et $]-5;2[\cap]1;4] =]1;2[$

Exercice 9.2 Soient $A =]-1;1[$, $B = [-2;0[$ et $C = [0;5[$. Déterminer :

$A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap B \cap C$, $A \cup B \cup C$, $A \cap (B \cup C)$, $A \cup (B \cap C)$, $(A \cup B) \cap (A \cap C)$

$$A \cap B =]-1;0[$$
$$A \cup B = [-2;1[$$
$$A \cap B \cap C = \emptyset$$
$$A \cup B \cup C = [-2;5[$$

$$A \cap (B \cup C) = A \cap [-2;5[= A =]-1;1[$$

$$A \cup (B \cap C) = A \cup \emptyset = A =]-1;1[$$

$$(A \cup B) \cap (A \cap C) = [-2;1[\cap [0;1[= [0;1[$$

Proposition 9.2

1. L'intersection et l'union sont **commutatives** : pour toutes parties A, B de E,

$$A \cap B = B \cap A \text{ et } A \cup B = B \cup A.$$

2. L'intersection et l'union sont **associatives** : pour toutes parties A, B, C de E,

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C,$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C.$$

$A \cap B \cap C$ est l'ensemble des éléments communs aux sous-ensembles A, B, C.
$A \cup B \cup C$ est l'ensemble des éléments qui sont dans l'un au moins des sous-ensembles A, B, C.

3. E est **élément neutre** pour l'intersection : pour toute partie A de E, $E \cap A = A$.
$\emptyset$ est **élément neutre** pour l'union : pour toute partie A de E, $A \cup \emptyset = A$.

4. L'intersection et la réunion sont **distributives** l'une de l'autre : pour toutes parties A, B, C de E,

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Remarque : On a également pour A un ensemble : $A \cap \emptyset = \emptyset$.

Proposition 9.3 Soient A et B deux ensembles,

$$A \subset B \iff A \cap B = A \qquad \text{et} \qquad A \subset B \iff A \cup B = B.$$

Démonstration. Montrons ces deux résultats par double implication:

($\Rightarrow$) On suppose que $A \subset B$ et on veut montrer que $A \cap B = A$.
D'après une précédente remarque, on sait déjà que $A \cap B \subset A$. Il nous reste donc à montrer que $A \cap B \supset A$. Soit $x \in A$, comme $A \subset B$, on a $x \in B$. Ainsi $x \in A$ et $x \in B$ donc $x \in A \cap B$.

($\Leftarrow$) On suppose que $A \cap B = A$ et montrons que $A \subset B$.
Soit $x \in A$, alors comme $A = A \cap B$, $x \in A \cap B$ donc en particulier $x \in B$. On a donc $A \subset B$.

($\Rightarrow$) On suppose que $A \subset B$ et on veut montrer que $A \cup B = B$.
D'après une précédente remarque, on sait déjà que $B \subset A \cup B$. Il nous reste donc à montrer que $A \cup B \subset B$. Soit $x \in A \cup B$ alors $x \in A$ ou $x \in B$. Si $x \in B$, c'est fini. Si $x \in A$, comme on a $A \subset B$, on a aussi $x \in B$. Dans les deux cas, $A \cup B \subset B$.

($\Leftarrow$) On suppose que $A \cup B = B$ et montrons que $A \subset B$.
Soit $x \in A$, alors $x \in A \cup B$. Or $A \cup B = B$ donc $x \in B$ et $A \subset B$. □

Remarque : *On peut définir la réunion ou l'intersection de plus de deux ensembles. Ainsi, si A_1, A_2, A_3 et A_4 désignent quatre ensembles, alors $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ se note $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{4} A_k$ et de même, $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$ se note $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{4} A_k$.*
Plus généralement, soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une famille de sous-ensembles de E,

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = \{x \in E \,|\, \forall k \in [\![1;n]\!], x \in A_k\} \quad \textit{et} \quad \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \{x \in E \,|\, \exists k \in [\![1;n]\!], x \in A_k\}.$$

$$\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k = \{x \in E \,|\, \forall k \in \mathbb{N}^*, x \in A_k\} \quad \textit{et} \quad \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k = \{x \in E \,|\, \exists k \in \mathbb{N}^*, x \in A_k\}.$$

Exercice 9.3 Montrer les égalités suivantes :

1. $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty}]-\infty, k] = \mathbb{R}$.

   - Il est immédiat que $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty}]-\infty, k] \subset \mathbb{R}$.
   - Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit N un entier strictement positif supérieur à x (par exemple $N = 1$ si $x \leqslant 0$ et $N = \lfloor x \rfloor + 1$ sinon, où $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x). Alors $x \leqslant N$, donc $x \in]-\infty, N]$ et $x \in \displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty}]-\infty, k]$. D'où $\mathbb{R} \subset \displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty}]-\infty, k]$
   - Par double inclusion, ces deux ensembles sont bien égaux.

2. $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{+\infty}]-\infty,-k] = \emptyset$

- Il est immédiat que $\emptyset \subset \displaystyle\bigcap_{k=1}^{+\infty}]-\infty,-k]$.
- Soit $x \in \displaystyle\bigcap_{k=1}^{+\infty}]-\infty,-k]$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*, x \in]-\infty,-k]$, c'est-à-dire $x \leqslant -k$. En passant à la limite pour $k \to +\infty$, on trouve $x \leqslant -\infty$: impossible. Donc il n'existe pas de x dans l'ensemble. Donc $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{+\infty}]-\infty,-k] \subset \emptyset$
- Par double inclusion, on obtient bien l'égalité annoncée.

9.1.3 Complémentaire

Définition 9.5 Soit A une partie d'un ensemble E. Le **complémentaire** de A dans E est l'ensemble, noté $\overline{A}$, de tous les éléments de E qui ne sont pas dans A. Autrement dit :

$$\overline{A} = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$

Exemple 9.6 si $E = \mathbb{R}$ et $A = [-2;5[$ alors $\overline{A} =]-\infty;-2[\cup[5;+\infty[$.

Exercice 9.4 Soit $E = [1;10[$, donner le complémentaire des parties suivantes de E : $\emptyset$, $A_1 = \{3\}$, $A_2 =]1;8[$, $A_3 = \{5\} \cup [6;7[$, E.

$\overline{\emptyset} = E$
$\overline{A_1} = [1;3[\cup]3;10[$
$\overline{A_2} = \{1\} \cup [8;10[$
$\overline{A_3} = [1;5[\cup]5;6[\cup[7;10[$
$\overline{E} = \emptyset$

Proposition 9.4 (Propriétés algébriques du complémentaire) Soient A et B deux parties de E.

- $\overline{\overline{A}} = A, \quad \overline{\emptyset} = E, \quad \overline{E} = \emptyset$
- Si $A \subset B$ alors $\overline{B} \subset \overline{A}$.
- **Lois de Morgan.** $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Démonstration. Démontrons la première loi de Morgan. Pour cela, raisonnons par double inclusion. Supposons que $A \cap B \neq \emptyset$.

($\subset$) Soit $x \in \overline{A \cap B}$, cela veut dire que $x \notin A \cap B$ c'est à dire $x \notin A$ ou $x \notin B$. Autrement dit $x \in \overline{A}$ ou $x \in \overline{B}$, ce qui s'écrit $A \in \overline{A} \cup \overline{B}$.

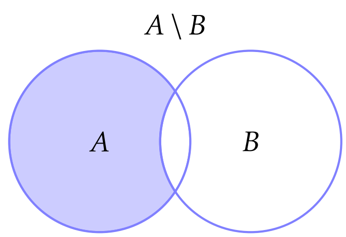
($\supset$) Soit $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ alors $x \in \overline{A}$ ou $x \in \overline{B}$. C'est à dire $x \notin A$ ou $x \notin B$. Or si $x \notin A$, $x \notin A \cap B$ et si $x \notin B$, $x \notin A \cap B$ donc dans les deux cas $x \notin A \cap B$ i.e. $x \in \overline{A \cap B}$.

Si $A \cap B = \emptyset$ alors $\overline{A \cap B} = E$ et on a également $\overline{A} \cup \overline{B} = E$. □

Remarque : Soient A et B deux parties de E. Le complémentaire de B dans A est l'ensemble, noté $A \setminus B$, de tous les éléments de A qui ne sont pas dans B. Autrement dit :

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\} = A \cap \overline{B}.$$

Diagramme de Venn.



9.1.4 Produit cartésien

Définition 9.6

- Le **produit cartésien** de deux ensembles E et F est l'ensemble constitué de tous les couples d'éléments (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$. On le note $E \times F$. Ainsi:

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\}.$$

- Plus généralement, si $n \geqslant 2$ et si E_1, E_2, ..., E_n désignent n ensembles, on définit le produit cartésien $E_1 \times \ldots \times E_n$ comme l'ensemble des n-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tels que $\forall i \in [\![1; n]\!] \quad x_i \in E_i$:

$$E_1 \times \ldots \times E_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid \forall i \in [\![1; n]\!] \quad x_i \in E_i\}$$

Exemple 9.7 Le système $\begin{cases} x + y & = & 1 \\ 2x - y & = & -7 \end{cases}$ a pour solution le couple $(x, y) = (-2, 3)$ donc si on note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de ce système, alors $\mathscr{S} = \{(-2, 3)\}$. Ici, l'unique solution du système est un élément de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Attention ! Il convient de ne pas confondre l'ensemble à un élément $\{(-2, 3)\}$ avec l'ensemble à deux éléments $\{-2, 3\}$.

Exercice 9.5 Résoudre le système $\{x+y+z=0$.

Ce système a une inconnue principale x et deux inconnues secondaires y et z. On a alors $x=-y-z$ et donc l'ensemble des solutions s'écrit

$$\mathscr{S}=\{(-y-z,y,z),(y,z)\in\mathbb{R}\times R\}$$

Les solutions sont des éléments de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^3$.

Définition 9.7 Lorsque $E=F$, on note $E^2=E\times E$ et plus généralement $E^n=\underbrace{E\times\ldots\times E}_{n \text{ fois}}$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

Exemple 9.8

- Le fait qu'une fonction f soit strictement décroissante sur un intervalle I s'écrit:

$$\forall(x_1,x_2)\in I^2 \qquad x_1<x_2\Longrightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

- Le théorème des quatre carrés (Lagrange, 1770) affirme que tout entier naturel n peut s'écrire comme la somme des carrés de quatre entiers. Ce théorème peut s'écrire à l'aide de quantificateurs comme suit:

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad \exists(a,b,c,d)\in\mathbb{N}^4 \qquad n=a^2+b^2+c^2+d^2$$

Cette écriture n'est pas unique, en effet on peut écrire par exemple $21=0^2+1^2+2^2+4^2=2^2+2^2+2^2+3^2=\ldots$

9.2 Applications

9.2.1 Notion d'application

Définition 9.8 Une **application** f est la donnée :

- d'un ensemble E, appelé **ensemble de départ** de l'application,
- d'un ensemble F appelé **ensemble d'arrivée** de l'application,
- et pour chaque élément x de E, d'un unique élément de F noté $f(x)$.

On dit que $f(x)$ est l'**image** de x par f, et si $y\in F$, un éventuel élément x de E vérifiant $f(x)=y$ est appelé un **antécédent** de y par f.

Notations : Une application f de E dans F se note ainsi:

$$f:\left\{\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x)\end{array}\right.$$

Bien noter la différence entre les deux flèches !

Exemple 9.9
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x-5}$ est une application de $[5;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. C'est aussi une application de $[6;+\infty[$ dans $\mathbb{R}_+$.
- La fonction inverse est une application de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ mais n'est pas une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exemple 9.10 Considérons l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n^2+2 \end{array} \right.$

1. Déterminer les images de $-2, 0, 2$ et 5 par f.
   $f(-2) = (-2)^2 + 2 = 6, \qquad f(0) = 2, \qquad f(2) = 6, \qquad f(5) = 27.$
2. Déterminer les antécédents de $0, 2, 5$ et 11 par f.
   - On cherche $n \in \mathbb{Z}$ tel que $f(n) = 0$. Ceci équivaut à $n^2 + 2 = 0$ soit $n^2 = -2$. Cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$ donc 0 n'a pas d'antécédent par f.
   - On cherche $n \in \mathbb{Z}$ tel que $f(n) = 2$. Ceci équivaut à $n^2+2 = 2$ soit $n^2 = 0$. Cette équation possède une unique solution dans $\mathbb{Z}$, à savoir 0 donc l'antécédent de 2 par f est 0.
   - On cherche $n \in \mathbb{Z}$ tel que $f(n) = 5$. Ceci équivaut à $n^2 + 2 = 5$ soit $n^2 = 3$. Cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$ donc 5 n'a pas d'antécédent par f.
   - On cherche $n \in \mathbb{Z}$ tel que $f(n) = 11$. Ceci équivaut à $n^2 + 2 = 11$ soit $n^2 = 9$. Cette équation possède deux solution dans $\mathbb{Z}$, à savoir -3 et 3. Ainsi 11 a deux antécédents par f : -3 et 3.

Définition 9.9 Deux applications f et g sont égales si et seulement si elles ont même ensemble de départ E, même ensemble d'arrivée F et si pour tout x dans E, on a $f(x) = g(x)$.

Exercice 9.6 Soient f et g les deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies respectivement par:

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \ln(1+\mathrm{e}^x) \quad \text{et} \quad g(x) = x + \ln(1+\mathrm{e}^{-x}).$$

Montrer que les applications f et g sont égales.
Ces deux applications ont bien les mêmes ensembles de départ et d'arrivée. Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = g(x)$.
Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \ln(1+\mathrm{e}^x) = \ln\left(\mathrm{e}^x\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x}+1\right)\right) = \ln(\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^{-x}+1)) = \ln(\mathrm{e}^x)+\ln(1+\mathrm{e}^{-x}) = x+\ln(1+\mathrm{e}^{-x}) = g(x).$$

Définition 9.10 Soit E un ensemble. On appelle **application identité** de E et on note id_E l'application de E dans E définie par:

$$\forall x \in E \qquad \mathrm{id}_E(x) = x$$

Définition 9.11 Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. La **composée** de f par g est l'application $g \circ f : E \longrightarrow G$ définie par $\forall x \in E \quad g \circ f(x) = g(f(x))$.

Attention ! En général, il n'y a aucun lien entre $g \circ f$ et $f \circ g$!
$g \circ f$ peut même être défini sans que $f \circ g$ le soit et inversement.
En effet, les conditions d'existence de $g \circ f$ et $f \circ g$ sont différentes. Par exemple, si on note $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathcal{A}_f$ et $g : \mathcal{D}_g \longrightarrow \mathcal{A}_g$, on a :

- Pour que $f \circ g$ soit bien défini, il faut que $\mathcal{A}_g \subset \mathcal{D}_f$.
- Pour que $g \circ f$ soit bien défini, il faut que $\mathcal{A}_f \subset \mathcal{D}_g$.

Exemple 9.11 Considérons les applications

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$$

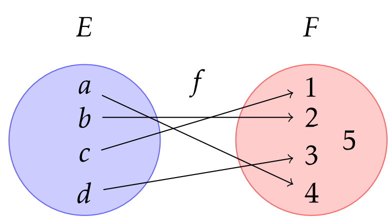
$g \circ f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array} \right.$ tandis que $f \circ g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$

9.2.2 Injection

Définition 9.12 Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est **injective** (ou que f est une **injection** de E dans F) si et seulement si :

$$\forall (x, x') \in E^2 \qquad x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$$

Représentation sagittale.
On peut représenter schématiquement une application injective. Chaque élément de l'ensemble F a au plus un antécédent dans E par f (*i.e.* soit 1 soit 0).



Exemple 9.12

- Pour tout ensemble E, on considère l'application

$$\mathrm{id}_E : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$$

Cette application est injective car pour $x \neq x', f(x) \neq f(x')$ puisque $f(x) = x$ et $f(x') = x'$.

- On considère l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$$

Elle n'est pas injective. En effet, $f(3) = f(-3)$.

Proposition 9.5 Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

- f est injective si et seulement si :

$$\forall (x, x') \in E^2 \qquad f(x) = f(x') \implies x = x'$$

- f est injective si et seulement si tout élément de F admet **au plus** un antécédent par f.
- f est injective si et seulement si pour tout y dans F, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x admet **au plus** une solution dans E.

Exercice 9.7 Montrer que l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{5x-2} \end{array} \right.$ est injective.

Soit $(x, x') \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) = f(x')$. Montrons que $x = x'$.
On a :

$$f(x) = f(x') \iff \mathrm{e}^{5x-2} = \mathrm{e}^{5x'-2} \iff 5x - 2 = 5x' - 2 \iff 5x = 5x' \iff x = x'.$$

Ainsi l'application f est bien injective sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9.8 Montrer que l'application $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{3x+4}{x+1} \end{array} \right.$ est injective.

Soit $y \in \mathbb{R}$, montrons que l'équation $g(x) = y$ admet au plus une solution dans $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.On a :

$$g(x) = y \iff \frac{3x+4}{x+1} = y \iff 3x + 4 = y(x+1) \iff 3x + 4 = yx + y$$

$$g(x) = y \iff 3x - yx = y - 4 \iff x(3 - y) = y - 4$$

Si $y = 3$, l'équation $g(x) = y$ n'admet pas de solution car on aurait alors $0 = -1$.
Si $y \neq 3$, l'équation $g(x) = y$ admet une unique solution $x = \dfrac{y-4}{3-y}$.

Il nous reste à vérifier que cette solution appartient bien à l'ensemble de départ $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $x = \dfrac{y-4}{3-y} = -1$. On a alors : $y-4 = y-3$ soit $-4=-3$. Absurde donc $x = \dfrac{y-4}{3-y} \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
Ainsi l'équation $g(x) = y$ admet bien **au plus** une solution et l'application g est bien injective.

Proposition 9.6 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application strictement monotone sur I. Alors $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ est injective.

Démonstration. Supposons que f est strictement croissante. Le cas strictement décroissante se traite de manière tout à fait similaire.
Soit $(x, x') \in E^2$, tel que $x \neq x'$. Supposons que $x < x'$ alors comme f est strictement croissante, on a : $f(x) < f(x')$ et donc $f(x) \neq f(x')$. L'application f est donc injective. □

Exemple 9.13 Etudions l'injectivité de l'application

$$h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array} \right.$$

Cette application est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc injective.

Méthode 9.2 (Pour étudier l'injectivité d'une application) Plusieurs méthodes sont possibles pour montrer qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est injective :

1. On se donne deux éléments quelconques de E, x et x' tels que $f(x) = f(x')$ et on montre que $x = x'$.
2. On se donne un élément y de F et on montre que l'équation $f(x) = y$ admet **au plus** une solution.
3. On montre que l'application f est strictement monotone.

Proposition 9.7 Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. Si f et g sont injectives, alors la composée $g \circ f$ est injective.

Démonstration. Soit $(x, x') \in E$ tel que $g \circ f(x) = g \circ f(x')$, on a alors :

$$g \circ f(x) = g \circ f(x') \iff g(f(x)) = g(f(x')).$$

Comme g est injective, $g(f(x)) = g(f(x')$ implique $f(x) = f(x')$. Mais comme f est injective, cela implique $x = x'$. Ainsi la composée $g \circ f$ est bien injective. □

Exemple 9.14 On considère l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{x^3} \end{array} \right.$$

Etudions son injectivité.

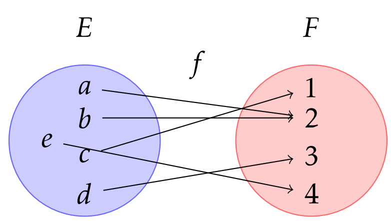
On définit les deux applications suivantes $h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array} \right.$ et $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^x \end{array} \right.$.
On a $f = g \circ h$. Or les applications g et h sont injectives car toutes les deux strictement croissantes. Ainsi l'application f est injective.

9.2.3 Surjection

Définition 9.13 Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est **surjective** (ou que f est une **surjection** de E sur F) si et seulement si tout élément de F admet au moins un antécédent par f. Autrement dit, l'application $f : E \longrightarrow F$ est surjective si et seulement si :

$$\forall y \in F \qquad \exists x \in E \qquad f(x) = y.$$

Représentation sagittale.
On peut représenter schématiquement une application surjective: chaque élément de l'ensemble F au moins un antécédent dans E par f (*i.e.* 1 ou plus).



Exemple 9.15 L'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ est surjective.

Pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, l'équation $x^2 = y$ admet bien au moins une solution, à savoir $\sqrt{y}$ ou $-\sqrt{y}$.

On rappelle la définition de l'ensemble image d'une application.

Définition 9.14 Soient f une application de E dans F et A une partie de E. On appelle **ensemble image** de A par l'application f et on note $f(A)$ l'ensemble:

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in F \mid \exists x \in A, \quad y = f(x)\}.$$

Remarque : $y \in f(A)$ se traduit par $\exists x \in A$, tel que $y = f(x)$.

Proposition 9.8 Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors f est surjective si et seulement si $F = f(E)$.

Démonstration. L'application f est surjective si et seulement si $\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$, si et seulement $\forall y \in F \quad y \in f(E)$, si et seulement $F \subset f(E)$.
Or on a toujours $f(E) \subset F$ donc f est surjective si et seulement si $f(E) = F$. □

Méthode 9.3 (Pour étudier la surjectivité d'une application) Pour montrer qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est surjective, on se donne un élément quelconque de F et on montre qu'il possède au moins un antécédent dans E.

Exercice 9.9 Déterminer si les applications suivantes sont surjectives :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & |x| \end{array} \right. \qquad g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 + 1 \end{array} \right. \qquad h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & 2n \end{array} \right.$$

- Etudions la surjectivité de l'application f.
  Pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, l'équation $f(x) = y$ *i.e.* $|x| = y$ admet toujours au moins une solution à savoir y lui-même car $|y| = y$ puisque $y \geqslant 0$. Ainsi l'application f est surjective.

- Etudions la surjectivité de l'application g.
  Pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, étudions les solutions de l'équation $g(x) = y$ *i.e.* de l'équation $x^2 + 1 = y$. On a alors $x^2 = y - 1$, si $y - 1 < 0$ *i.e.* si $y < 1$, l'équation n'admet aucune solution sur $\mathbb{R}$. L'application g n'est donc pas surjective.

- Etudions la surjectivité de l'application h.
  Pour tout $y \in \mathbb{N}$, étudions les solutions de l'équation $f(n) = y$ *i.e.* $2n = y$ sur $\mathbb{N}$. On a $n = \dfrac{y}{2}$, or pour y impair $n = \dfrac{y}{2} \notin \mathbb{N}$. L'application h n'est donc pas surjective.

Proposition 9.9 Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. Si f et g sont surjectives, alors la composée $g \circ f$ est surjective.

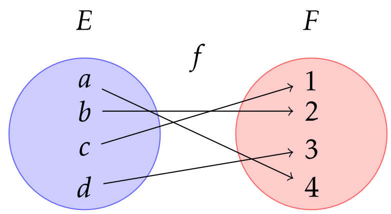
Démonstration. Montrons que $g \circ f(E) = G$.
Comme f est surjective, on a $f(E) = F$, ainsi $g \circ f(E) = g(f(E)) = g(F)$. Or g est également surjective donc $g(F) = G$. Ainsi $g \circ f(E) = G$ et l'application $g \circ f$ est bien surjective. □

9.2.4 Bijection

Définition 9.15 Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est **bijective** (ou que f est une **bijection** de E sur F) si et seulement si tout élément de F possède exactement un antécédent par f:

$$\forall y \in F \qquad \exists! x \in E \qquad f(x) = y$$

Représentation sagittale.
On peut représenter schématiquement une application bijective: chaque élément de l'ensemble F a exactement un antécédent dans E par f (*i.e.* un).



Théorème 9.1 **(Première caractérisation d'une application bijective)** Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors :

$$f \text{ est bijective} \iff f \text{ est injective et surjective}$$

Exemple 9.16

1. L'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$ est bijective car elle est à la fois injective et surjective.

2. L'application $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ n'est pas bijective. En fait, elle n'est ni injective, ni surjective.

3. L'application $h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ est bien bijective puisqu'elle est à la fois injective et surjective.

Théorème 9.2 **(Deuxième caractérisation d'une application bijective)** Une application $f : E \longrightarrow F$ est bijective si et seulement s'il existe $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$.
L'application g est alors appelé **bijection réciproque** de f et est notée f^{-1}.

Attention ! Méfiez-vous de la notation f^{-1}, cela n'a rien à voir avec $\dfrac{1}{f}$. Il faut plutôt mettre ça en parallèle avec la notation pour l'inverse d'une matrice.

Exemple 9.17 La fonction logarithme népérien est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est la fonction exponentielle. On sait que dans un repère orthonormé, les courbes $\mathscr{C}_{\ln}$ et $\mathscr{C}_{\exp}$ sont symétriques par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$: c'est une propriété générale des bijections réciproques.

Exemple 9.18 Les fonctions carrée $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}\right.$ et racine carrée $g : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}\right.$ sont des bijections réciproques l'une de l'autre :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad (f \circ g)(x) = (\sqrt{x})^2 = x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad (g \circ f)(x) = \sqrt{x^2} = x.$$

Exercice 9.10 Montrer que l'application $g : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{5x-2} \end{array}\right.$ est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$, montrons que l'équation $g(x) = y$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}$ et déterminons-la. Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$g(x) = y \iff \mathrm{e}^{5x-2} = y \iff 5x - 2 = \ln(y) \iff 5x = \ln(y) + 2 \iff x = \frac{\ln(y) + 2}{5} \in \mathbb{R}.$$

Ainsi g est bijective sur $\mathbb{R}$ et sa bijection réciproque g^{-1} est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$g^{-1}(x) = \frac{\ln(x) + 2}{5}.$$

Exercice 9.11 Montrer que l'application $h : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \{3\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{3x+4}{x+1} \end{array}\right.$ est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, montrons que l'équation $h(x) = y$ possède une unique solution dans $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et déterminons-la. Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, on a :

$$h(x) = y \iff \frac{3x+4}{x+1} = y \iff 3x + 4 = y(x+1) \iff 3x + 4 = yx + y$$

$$h(x) = y \iff 3x - yx = y - 4 \iff x(3 - y) = y - 4 \iff x = \frac{y-4}{3-y} \text{ car } y \neq 3.$$

Vérifions que $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, c'est à dire que $x \neq -1$. Par l'absurde, supposons que $x = -1$ alors $y - 4 = y - 3$ *i.e.* $-4 = -3$. Absurde. On a bien $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Ainsi h est bijective sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et sa bijection réciproque h^{-1} est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par $h^{-1}(x) = \dfrac{y-4}{3-y}$.

Proposition 9.10 Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. Si f et g sont bijectives, alors la composée $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration. On peut démontrer cette proposition de deux manières différentes.

Première méthode On utilise la deuxième caractérisation des applications bijectives pour démontrer ce théorème. Montrons que $(g\circ f)\circ(f^{-1}\circ g^{-1}) = \mathrm{Id}_G$ et $(f^{-1}\circ g^{-1})\circ(g\circ f) = \mathrm{Id}_E$. On a

$$\begin{aligned}(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &= g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1}\\ &= g \circ \mathrm{Id}_E \circ g^{-1}\\ &= g \circ g^{-1}\\ &= \mathrm{Id}_G\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) &= f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f\\ &= f^{-1} \circ \mathrm{Id}_F \circ f\\ &= f^{-1} \circ f\\ &= \mathrm{Id}_E.\end{aligned}$$

Ainsi $g \circ f$ est bien bijective de bijection réciproque $f^{-1} \circ g^{-1}$.

Deuxième méthode Les applications f et g étant bijectives, elles sont à la fois injectives et surjectives.
D'après la Proposition 9.7, la composée de deux applications injectives est injective, ainsi $g \circ f$ est injective.
De plus, d'après la Proposition 9.9, la composée de deux applications surjectives est surjective, ainsi $g \circ f$ est surjective.
Ainsi, l'application $g \circ f$ est à la fois injective et surjective, elle est donc bien bijective.

□

Méthode 9.4 **(Pour étudier la bijectivité d'une application)** Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

1. Pour montrer que f est bijective, on pourra raisonner en deux étapes en montrant que f est injective puis surjective.

2. Pour montrer que f est bijective, on peut résoudre l'équation $y = f(x)$ pour $y \in F$ et on montre que l'équation a une unique solution.

3. Pour montrer que f n'est pas bijective, on pourra montrer que f n'est pas injective ou bien que f n'est pas surjective.

Théorème 9.3 Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, continue et strictement monotone sur I. Alors f réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$.

Démonstration. Dans le Chapitre 10 : Limites et continuité. $\square$

Exemple 9.19 L'application $h : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{cases}$ est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $h(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ donc h réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est $h^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt[3]{x} \end{cases}$ qu'il convient de ne pas confondre avec $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^{\frac{1}{3}} \end{cases}$. (toutefois, ces deux applications coïncident sur $\mathbb{R}_+^*$)

Exemple 9.20 On étudie la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

On pose pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $f(x) = \tan(x)$.

La fonction f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ comme quotient de fonctions dérivables (elle est en particulier continue sur cet intervalle) et $f'(x) = 1 + \tan(x)^2 > 0$. Ainsi la fonction f est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.
De plus, on a :

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty,$$

donc $f\left(\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right) = \mathbb{R}$. Ainsi la fonction f réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.
Sa bijection réciproque n'est rien d'autre que la fonction $\arctan$ définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.