8. Polynômes

Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve.

Euclide

Ce chapitre est consacré à un cas particulier d'une fonction d'une variable réelle : l'étude des fonctions polynomiales (ou fonctions polynômes). Les fonctions polynomiales sont des fonctions de la forme $x \to a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$. Ce chapitre a pour but de donner le vocabulaire sur les polynômes (coefficients, degré etc) et différentes méthodes pour factoriser des polynômes.

8.1 Généralités sur les polynômes

8.1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 8.1 On appelle **polynôme** (ou fonction polynômiale) toute fonction P définie sur $\mathbb{R}$ de la forme:

$$P : x \mapsto a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k$$

où a_0, a_1, …, a_n sont des réels appelés **coefficients** du polynôme P.

Notations : On note $\mathbb{R}[x]$ l'ensemble de tous les polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Remarque : AVANT la réforme, les polynômes étaient définis avec X et non x (ce X pouvait cacher tout réel x mais également une matrice ou d'autres choses encore...)
Il y a équivalence entre les rédactions suivantes:

1. *Soit* $P \in \mathbb{R}[X]$ *le polynôme* $P(X) = 2X^2 - X + 1$. *(ancien programme)*
2. *Soit* $P \in \mathbb{R}[x]$ *le polynôme* $P : x \mapsto 2x^2 - x + 1$.
3. *Soit* $P \in \mathbb{R}[x]$ *le polynôme défini par :* $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = 2x^2 - x + 1$.

Pour simplifier le passage d'une écriture à l'autre, on définit les polynômes suivants :

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N}, X^k : x \mapsto x^k.$$

Ainsi, le polynôme noté $2X^2 - 3X + 1$ *est le polynôme* $x \mapsto 2x^2 - 3x + 1$.

Définition 8.2 Soit $P : x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ un polynôme de $\mathbb{R}[x]$.

- Si $a_n \neq 0$, alors le réel a_n est appelé **coefficient dominant** du polynôme P.
- Si $a_n \neq 0$, alors l'entier n est appelé le **degré** du polynôme P et on note $\deg(P) = n$.
- Le polynôme dont tous les coefficients sont nuls est appelé le **polynôme nul**, il est noté $0_{\mathbb{R}[x]}$.

Remarque : Par convention, le polynôme nul a pour degré $-\infty$. *Un polynôme constant non nul est de degré* 0.

Exemple 8.1

- La fonction $P : x \mapsto x^2 - 3x^5 + 2x^3 + x - 4$ est un polynôme de degré et de coefficient dominant égal à
- La fonction $Q : x \mapsto x^3 - x(x-2)^2$ est un polynôme de degré et de coefficient dominant égal à .
- La fonction $R : x \mapsto x^3 - 6x\sqrt{x} + 5$ n'est pas un polynôme car, en particulier, son domaine de définition est

Exercice 8.1 Déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme

$$Q : x \mapsto (2x-3)^8.$$

Notations : On note $\mathbb{R}_n[x]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ qui sont de degré inférieur ou égal à n.

Egalité de polynômes et identification

Théorème 8.1 Deux polynômes sont égaux si et seulement s'ils ont même degré et si leurs coefficients sont égaux deux à deux:

$$\left(\forall x \in \mathbb{R} \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k\right) \Longleftrightarrow (n = m \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![0;n]\!] \quad a_k = b_k)$$

Le théorème précédent justifie ce qu'on appelle la **méthode d'identification** des coefficients de deux polynômes égaux.

Exercice type 8.1 Soit P le polynôme défini par:

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad P(x) = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4$$

Montrer que P est le carré d'un polynôme Q de degré 2 à déterminer.

8.1.2 Opérations algébriques

La définition donnée dans ce cours des polynômes permet d'appliquer directement les opérations usuelles sur les fonctions.

Proposition 8.1 Soient P et Q deux polynômes et soit λ un réel. Alors $\lambda \cdot P$, $P + Q$ et PQ sont aussi des polynômes.
La fonction $P \circ Q$ définie par $(P \circ Q)(x) = P(Q(x))$ est également un polynôme.

Exemple 8.2 Soit $P(x) = 3x^2 - 5x + 2$ et $Q(x) = -7x^3 + x^2 + \sqrt{2}$.

- $P(x) + Q(x)$
- $-5Q(x)$
- $P(x)Q(x)$

Exemple 8.3 Soit les polynômes $P : x \mapsto x^3 - 5x + 2$, et $Q : x \mapsto x^2$. Déterminer le polynôme $P \circ Q$.

8.1.3 Propriétés du degré

Proposition 8.2 Soient P et Q deux polynômes non nuls. Alors:

- $\deg(\lambda \cdot P) = \deg(P)$
- $\deg(P + Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$
- $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$

Exemple 8.4 Soient P, Q et R les polynômes définis par:

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad P(x) = x^3 + x^2 + 1 \text{ et } Q(x) = -x^3 - 2x^2 - 3 \text{ et } R(x) = 2x^2 - 5.$$

Remarque : Ces propriétés permettent de montrer que le polynôme Q déterminé l'Exercice-type 8.1 est effectivement de degré 2 avant même d'effectuer tout calcul.

On en déduit la conséquence importante suivante:

Proposition 8.3 **(Intégrité)** Soient P et Q deux éléments de $\mathbb{R}[x]$. Alors

$$(PQ)(x) = 0 \iff P(x) = 0 \quad \text{ou} \quad Q(x) = 0.$$

Démonstration.

□

Remarque : Cette propriété d'intégrité est fausse dans l'espace des matrices, et est également fausse dans l'espace des fonctions...

8.2 Divisibilité dans $\mathbb{R}[x]$

Théorème 8.2 **(Division euclidienne)** Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{R}[x]$, avec B non nul. Alors il existe un unique couple de polynômes (Q, R) de $\mathbb{R}[x]$ qui vérifient:

$$A = B \cdot Q + R$$

avec $\deg(R) < \deg(B)$. On appelle Q le quotient et R le reste de la division euclidienne de A par B.

Exemple 8.5 On peut écrire la division euclidienne du polynôme $A : x \to x^2 + x + 1$ par le polynôme $B : x \to x$:

Démonstration.

□

Exemple 8.6 De manière générale, pour effectuer une division de polynôme, on peut poser le calcul. Si on veut par exemple diviser x^4+3x^3+3x+2 par x^2+1, cela donne :

Exercice 8.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quel est le reste de la division euclidienne de x^n par $x-1$?

Définition 8.3 (Multiple, diviseur) Soit A et B deux polynômes de $\mathbb{R}[x]$, avec B non nul. On dit que le polynôme B est un diviseur du polynôme A, ou le polynôme A est un multiple du polynôme B, lorsqu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[x]$ tel que

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x).$$

On peut également dire que B divise A.

Remarque : Autrement dit, B est un diviseur de A lorsque le reste de la division de A par B est le polynôme nul.

Exemple 8.7 $(x+1)$ et $(x-1)$ sont des diviseurs de x^2-1.

Exercice 8.3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $x-1$ divise $x^n - 1$.

8.3 Polynôme dérivé

Proposition 8.4 Soit $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{R}[x]$. Alors P est dérivable sur $\mathbb{R}$.
P' est encore un polynôme, appelé polynôme dérivé de P. C'est le polynôme défini par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + 2 a_2 x + a_1.$$

Remarque :

- *Lorsque* $\deg(P) = n$, *avec* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a* $\deg(P') = n - 1$.
- *Le polynôme dérivé d'un polynôme constant est le polynôme nul.*
- *Les règles de dérivation des polynômes sont les mêmes que pour les fonctions réelles (par exemple,* $(PQ)' = P'Q + PQ'$ *etc.)*

Exemple 8.8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le polynôme $P(x) = (x^2 - 1)^n$. Calculer P'.

Dérivées successives

Par itération, on pourra considérer la $k^{\text{ième}}$ dérivée du polynôme P, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Si $k = 0$, par convention $P^{(0)} = P$.
Si $k \geqslant 1$, le polynôme dérivé d'ordre k, noté $P^{(k)}$, est défini par $P^{(k)} = \left(P^{(k-1)}\right)'$.

Exemple 8.9 Calculer les dérivées successives de $P : x \mapsto x^4 + 2x^2 - 1$.

Remarque : Lorsque $\deg P = n$, $\forall k > n, \quad P^{(k)} = 0_{\mathbb{R}[x]}$

Exercice type 8.2 Calculer toutes les dérivées du polynôme $x \mapsto x^n$, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé.

Proposition 8.5 (Formule de Taylor) Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$ et $a \in \mathbb{R}$. Alors pour tout réel x,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Démonstration.

□

Exemple 8.10 Soit $P(x) = x^2 + 3x + 5$. Ecrire la formule de Taylor pour $a = 1$.

8.4 Racines d'un polynôme

8.4.1 Définition

Définition 8.4 On dit que le réel α est une **racine** du polynôme P lorsque $P(\alpha) = 0$.

Remarque :

- *Le polynôme nul a une infinité de racines.*
- *Pour trouver des racines, on peut essayer de remplacer la variable x par -1, 1, 0, etc. Si on trouve 0, alors on dit que l'on a trouvé une « racine évidente ».*

Exemple 8.11

- Soit le polynôme $P : x \mapsto (x-5)(2x+1)(8-2x)$.
- Soit le polynôme $Q : x \mapsto x^3 - 2x + 1$.
- Soit le polynôme $R : x \mapsto x^4 + 1$.

8.4.2 Racines et divisibilité

Théorème 8.3 Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors α est une racine de P ssi le polynôme $x-\alpha$ divise P. Autrement dit, ssi il existe un polynôme Q non nul tel que pour tout $x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x-\alpha)Q(x)$.

Démonstration.

□

Exemple 8.12 1 est racine de x^2-1 et donc $x-1$ divise x^2-1.

Généralisation

Théorème 8.4 Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, p réels <u>2 à 2</u> distincts. Alors $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont p racines de P ssi le polynôme $x \mapsto (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots\left(x-\alpha_p\right)$ divise P.

Démonstration.

□

Proposition 8.6 Un polynôme de degré inférieur ou égal à n et qui possède au moins $n+1$ racines distinctes est le polynôme nul.

Remarque :

- *Par contraposée, tout polynôme non nul de degré n admet au plus n racines.*
- *En particulier, tout polynôme qui admet une infinité de racines est le polynôme nul.*

Démonstration.

□

8.4.3 Ordre de multiplicité d'une racine

Définition 8.5 Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que α est une racine d'ordre de multiplicité $k \in \mathbb{N}^*$ de P si $P(\alpha) = P'(\alpha) = \ldots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

Remarque :

- *En particulier α est racine **simple** de P si $P(\alpha) = 0$ et $P'(\alpha) \neq 0$*
- *α est racine **double** de P si $P(\alpha) = 0$, $P'(\alpha) = 0$ et $P''(\alpha) \neq 0$.*
- *L'ordre de multiplicité d'une racine est inférieure au degré du polynôme.*

Exemple 8.13 On considère $P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2$. Est-ce que 1 est racine, et si oui avec quelle multiplicité?

Théorème 8.5 Soit $P \in \mathbb{R}[x]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, et $k \in \mathbb{N}^*$.
Alors α est racine d'ordre k de P ssi il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x-\alpha)^k Q(x)$$

avec $Q(\alpha) \neq 0$. Autrement dit ssi $(x-\alpha)^k$ divise P, mais $(x-\alpha)^{k+1}$ ne divise plus P.

Remarque : En particulier, α est racine ***double*** *si $(x-\alpha)^2$ divise P mais que $(x-\alpha)^3$ ne divise pas P.*

Démonstration.

□

8.5 Factorisation

8.5.1 Cas des polynômes de degré 2

Théorème 8.6 Soit le polynôme $P : x \longrightarrow ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

- Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ alors P admet deux racines réelles simples distinctes $r_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. Le polynôme P se factorise alors sous la forme :
$$P(x) = a(x - r_1)(x - r_2).$$
- Si $\Delta = 0$ alors P admet une racine double $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$. Le polynôme P se factorise alors sous la forme :
$$P(x) = a(x - x_0)^2.$$
- Si $\Delta < 0$, P n'admet aucune racine réelle et le polynôme P ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$.

8.5.2 Factorisation sur deux exemples

Un premier exemple

Factoriser au maximum le polynôme $P(x) = x^3 - 7x - 6$.

Un deuxième exemple

Factoriser au maximum le polynôme $P(x) = x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6$.

8.5.3 Forme factorisée

Proposition 8.7 **(Admis)** Tout polynôme de $\mathbb{R}[x]$ peut s'écrire comme produit d'un réel, de polynômes de degré 1 et de polynômes de degré 2 n'ayant pas de racine réelle. Autrement dit, tout polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$ peut se décomposer sous la forme suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = a_n \prod_{i=1}^{k} (x - \alpha_i)^{r_i} \prod_{j=1}^{l} (x^2 + b_j x + c_j)$$

où

- a_n est le coefficient dominant de P;
- les α_i sont les racines réelles de P, de multiplicités respectives $r_i \in \mathbb{N}^*$;
- les trinômes $x \to x^2 + b_j x + c_j$ sont de discriminant strictement négatif.