8. Polynômes

Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve.

Euclide

Ce chapitre est consacré à un cas particulier d'une fonction d'une variable réelle : l'étude des fonctions polynomiales (ou fonctions polynômes). Les fonctions polynomiales sont des fonctions de la forme $x \to a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$. Ce chapitre a pour but de donner le vocabulaire sur les polynômes (coefficients, degré etc) et différentes méthodes pour factoriser des polynômes.

8.1 Généralités sur les polynômes

8.1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 8.1 On appelle **polynôme** (ou fonction polynômiale) toute fonction P définie sur $\mathbb{R}$ de la forme:

$$P : x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

où a_0, a_1, $\ldots, a_n$ sont des réels appelés **coefficients** du polynôme P.

Notations : On note $\mathbb{R}[x]$ l'ensemble de tous les polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Remarque : AVANT la réforme, les polynômes étaient définis avec X et non x (ce X pouvait cacher tout réel x mais également une matrice ou d'autres choses encore...)
Il y a équivalence entre les rédactions suivantes:

1. *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme $P(X) = 2X^2 - X + 1$. (ancien programme)*
2. *Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ le polynôme $P : x \mapsto 2x^2 - x + 1$.*
3. *Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ le polynôme défini par : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = 2x^2 - x + 1$.*

Pour simplifier le passage d'une écriture à l'autre, on définit les polynômes suivants :

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N}, X^k : x \mapsto x^k.$$

Ainsi, le polynôme noté $2X^2 - 3X + 1$ est le polynôme $x \mapsto 2x^2 - 3x + 1$.

Définition 8.2 Soit $P : x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ un polynôme de $\mathbb{R}[x]$.

- Si $a_n \neq 0$, alors le réel a_n est appelé **coefficient dominant** du polynôme P.
- Si $a_n \neq 0$, alors l'entier n est appelé le **degré** du polynôme P et on note $\deg(P) = n$.
- Le polynôme dont tous les coefficients sont nuls est appelé le **polynôme nul**, il est noté $0_{\mathbb{R}[x]}$.

Remarque : Par convention, le polynôme nul a pour degré $-\infty$. Un polynôme constant non nul est de degré 0.

Exemple 8.1

- La fonction $P : x \mapsto x^2 - 3x^5 + 2x^3 + x - 4$ est un polynôme de degré 5 et de coefficient dominant égal à -3.
- La fonction $Q : x \mapsto x^3 - x(x-2)^2$ est un polynôme de degré 2 et de coefficient dominant égal à 2 .
- La fonction $R : x \mapsto x^3 - 6x\sqrt{x} + 5$ n'est pas un polynôme car, en particulier, son domaine de définition est $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+ \neq \mathbb{R}$.

Exercice 8.1 Déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme

$$Q : x \mapsto (2x-3)^8.$$

On peut écrire le polynôme sous forme développée à l'aide du binôme de Newton. On a :

$$(2x-3)^8 = \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} (2x)^k (-3)^{8-k} = \binom{8}{8} (2x)^8 + \sum_{k=0}^{7} \binom{8}{k} (2x)^k (-3)^{8-k}.$$

Ainsi Q est de degré 8 et son coefficient est égal à $2^8 = 256$.

Notations : On note $\mathbb{R}_n[x]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ qui sont de degré inférieur ou égal à n.

Egalité de polynômes et identification

Théorème 8.1 Deux polynômes sont égaux si et seulement s'ils ont même degré et si leurs coefficients sont égaux deux à deux:

$$\left(\forall x \in \mathbb{R} \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k\right) \Longleftrightarrow (n = m \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![0;n]\!] \quad a_k = b_k)$$

Le théorème précédent justifie ce qu'on appelle la **méthode d'identification** des coefficients de deux polynômes égaux.

Exercice type 8.1 Soit P le polynôme défini par:

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad P(x) = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4$$

Montrer que P est le carré d'un polynôme Q de degré 2 à déterminer.
On cherche un polynôme Q de degré 2 tel que $P(x) = Q(x)^2$. Posons $Q(x) = ax^2 + bx + c$.
Calculons :

$$\begin{aligned} Q(x)^2 &= (ax^2 + bx + c)^2 \\ &= a^2x^4 + 2abx^3 + 2acx^2 + b^2x^2 + 2bcx + c^2 \\ &= a^2x^4 + 2abx^3 + (2ac + b^2)x^2 + 2bcx + c^2 \end{aligned}$$

Pour que $P = Q^2$, par unicité de l'écriture d'un polynôme, on identifie les coefficients:

$$\begin{cases} a & = 1 \\ 2ab & = -6 \\ 2ac + b^2 & = 13 \\ 2bc & = -12 \\ c^2 & = 4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a & = 1 \\ b & = -3 \\ c & = 2 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} a & = -1 \\ b & = 3 \\ c & = -2 \end{cases}.$$

Ainsi $P(x) = (x^2 - 3x + 2)^2$ ou $P(x) = (-x^2 + 3x - 2)^2$.

8.1.2 Opérations algébriques

La définition donnée dans ce cours des polynômes permet d'appliquer directement les opérations usuelles sur les fonctions.

Proposition 8.1 Soient P et Q deux polynômes et soit λ un réel. Alors $\lambda \cdot P$, $P + Q$ et PQ sont aussi des polynômes.
La fonction $P \circ Q$ définie par $(P \circ Q)(x) = P(Q(x))$ est également un polynôme.

Exemple 8.2 Soit $P(x) = 3x^2 - 5x + 2$ et $Q(x) = -7x^3 + x^2 + \sqrt{2}$.

- $P(x) + Q(x) = -7x^3 + 4x^2 - 5x + 2 + \sqrt{2}$.
- $-5Q(x) = 35x^3 - 5x^2 - 5\sqrt{2}$.
- $P(x)Q(x)$

$$\begin{aligned} P(x)Q(x) &= 21x^5 + 3x^4 + 3\sqrt{2}x^2 + 35x^4 - 5x^3 - 5\sqrt{2}x - 14x^3 + 2x^2 + 2\sqrt{2} \\ &= -21x^5 + 38x^4 - 19x^3 + (2 + 3\sqrt{2})x^2 - 5\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Exemple 8.3 Soit les polynômes $P : x \mapsto x^3 - 5x + 2$, et $Q : x \mapsto x^2$. Déterminer le polynôme $P \circ Q$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, $(P \circ Q)(x) = P(Q(x)) = (x^2)^3 - 5x^2 + 2 = x^6 - 5x^2 + 2$.
Souvent, dans ce cas, le polynôme Q ne sera pas introduit: on regardera directement le polynôme $x \mapsto P\left(x^2\right)$.

8.1.3 Propriétés du degré

Proposition 8.2 Soient P et Q deux polynômes non nuls. Alors:

- $\deg(\lambda \cdot P) = \deg(P)$
- $\deg(P + Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$
- $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$

Exemple 8.4 Soient P, Q et R les polynômes définis par:

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad P(x) = x^3 + x^2 + 1 \text{ et } Q(x) = -x^3 - 2x^2 - 3 \text{ et } R(x) = 2x^2 - 5.$$

Alors $(P+Q)(x) = P(x)+Q(x) = -x^2-2$ est de degré 2 (additionner deux polynômes peut faire diminuer le degré).
D'autre part, $(QR)(x) = Q(x) \times R(x) = -2x^5 + 5x^3 - 4x^4 + 4x^2 + 15$ est de degré $5 = 3 + 2$.

Remarque : Ces propriétés permettent de montrer que le polynôme Q déterminé l'Exercice-type 8.1 est effectivement de degré 2 avant même d'effectuer tout calcul.

En effet, supposons qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que $P = Q^2$. Alors on a :

$$\deg(P) = \deg(Q^2) = 2\deg(Q) \qquad \textit{et donc} \qquad \deg(Q) = \frac{\deg(P)}{2} = 2.$$

On en déduit la conséquence importante suivante:

Proposition 8.3 **(Intégrité)** Soient P et Q deux éléments de $\mathbb{R}[x]$. Alors

$$(PQ)(x) = 0 \iff P(x) = 0 \quad \text{ou} \quad Q(x) = 0.$$

Démonstration. La réciproque est évidente, il suffit donc de vérifier le sens direct. On raisonne par contraposée : supposons que que $P \neq 0$ et $Q \neq 0$. Par passage au degré, on en déduit que $\deg(P) \geqslant 0$ et $\deg(Q) \geqslant 0$. Or $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$. Donc $\deg(PQ) \geqslant 0$. Donc $PQ) \neq 0$, d'où le résultat. □

Remarque : Cette propriété d'intégrité est fausse dans l'espace des matrices, et est également fausse dans l'espace des fonctions...

8.2 Divisibilité dans $\mathbb{R}[x]$

Théorème 8.2 **(Division euclidienne)** Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{R}[x]$, avec B non nul. Alors il existe un unique couple de polynômes (Q, R) de $\mathbb{R}[x]$ qui vérifient:

$$A = B \cdot Q + R$$

avec $\deg(R) < \deg(B)$. On appelle Q le quotient et R le reste de la division euclidienne de A par B.

Exemple 8.5 On peut écrire la division euclidienne du polynôme $A : x \longrightarrow x^2 + x + 1$ par le polynôme $B : x \longrightarrow x$:

$$A(x) = x^2 + x + 1 = x(x+1) + 1 = B(x)Q(x) + R(x)$$

le quotient est donc $Q(x) = x + 1$ et le reste $R(x) = 1$ est de degré $0 < 1$.

Démonstration. Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{R}[x]$, on admet l'existence d'un couple de polynômes (Q, R) tel que $A = BQ + R$ avec $\deg(R) < \deg(B)$. Montrons alors l'unicité d'un tel couple.
Unicité: Supposons que (Q_1, R_1) et (Q_2, R_2) soient deux couples convenant : $A = BQ_1 + R_1$ et $A = BQ_2 + R_2$, avec $\deg(R_1) < \deg(B)$ et $\deg(R_2) < \deg(B)$. On trouve par soustraction :

$$B(Q_1 - Q_2) = R_2 - R_1$$

Par propriétés du degré, on obtient alors :

$$\deg(B) + \deg(Q_1 - Q_2) = \deg(B(Q_1 - Q_2)) = \deg(R_2 - R_1) \leqslant \max(\deg(R_1), \deg(R_2)) < \deg(B)$$

Or le degré est à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{-\infty\}$. Donc $\deg(Q_1 - Q_2) = -\infty$ et $Q_1 = Q_2$. Donc $R_1 = R_2$, ce qui termine la preuve de l'unicité. $\square$

Exemple 8.6 De manière générale, pour effectuer une division de polynôme, on peut poser le calcul. Si on veut par exemple diviser $x^4 + 3x^3 + 3x + 2$ par $x^2 + 1$, cela donne :

$$
\begin{array}{ccccccccc|l}
x^4 & + & 3x^3 & & & + & 3x & + & 2 & x^2+1 \\ \cline{10-10}
-x^4 & & & - & x^2 & & & & & x^2+3x-1 \\ \cline{1-9}
 & & 3x^3 & - & x^2 & + & 3x & + & 2 & \\
 & - & 3x^3 & & & - & 3x & & & \\ \cline{2-9}
 & & & - & x^2 & & & + & 2 & \\
 & & & & x^2 & & & + & 1 & \\ \cline{4-9}
 & & & & & & & & 3 &
\end{array}
$$

Le quotient est donc $Q(x) = x^2 + 3x - 1$ et le reste égal à 3 vérifie $\deg(3) = 0 < 2 = \deg(Q)$.

Exercice 8.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quel est le reste de la division euclidienne de x^n par $x - 1$?

On peut commencer par remarquer, en appliquant le Théorème de la division euclidienne, que nécessairement $\deg(R) < 1$ donc soit $R = 0$ soit R est un polynôme constant. Ainsi il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $R = a$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x^n = (x-1)Q(x) + a.$$

Evaluons cette relation pour $x = 1$, on a obtient : $a = 1$. Ainsi le reste de la division euclidienne de x^n par $x - 1$ est égal à 1.

Définition 8.3 (Multiple, diviseur) Soit A et B deux polynômes de $\mathbb{R}[x]$, avec B non nul. On dit que le polynôme B est un diviseur du polynôme A, ou le polynôme A est un multiple du polynôme B, lorsqu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[x]$ tel que

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x).$$

On peut également dire que B divise A.

Remarque : Autrement dit, B est un diviseur de A lorsque le reste de la division de A par B est le polynôme nul.

Exemple 8.7 $(x+1)$ et $(x-1)$ sont des diviseurs de $x^2 - 1$.

Exercice 8.3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $x-1$ divise $x^n - 1$.

On effectue la division euclidienne de $x^n - 1$ par $x-1$, ainsi il existe un unique couple de polynômes Q et R tels que :

$$x^n - 1 = (x-1)Q + R \quad \text{et} \quad \deg(R) < 1.$$

Comme $\deg(R) < 1$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $R = a$. Ainsi on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x^n - 1 = (x-1)Q + a.$$

Evaluons cette relation pour $x = 1$, on obtient :

$$1^n - 1 = 0 \times Q + a$$

soit

$$a = 0.$$

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^n - 1 = (x-1)Q$ soit $x-1$ divise $x^n - 1$.

8.3 Polynôme dérivé

Proposition 8.4 Soit $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{R}[x]$. Alors P est dérivable sur $\mathbb{R}$.
P' est encore un polynôme, appelé polynôme dérivé de P. C'est le polynôme défini par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + 2a_2 x + a_1.$$

<u>*Remarque*</u> :

- *Lorsque* $\deg(P) = n$, *avec* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a* $\deg(P') = n-1$.
- *Le polynôme dérivé d'un polynôme constant est le polynôme nul.*
- *Les règles de dérivation des polynômes sont les mêmes que pour les fonctions réelles (par exemple,* $(PQ)' = P'Q + PQ'$ *etc.)*

Exemple 8.8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le polynôme $P(x) = (x^2-1)^n$. Calculer P'.

En appliquant les règles de dérivation usuelles, on obtient :

$$P'(x) = n \times 2x(x^2-1)^{n-1}.$$

Dérivées successives

Par itération, on pourra considérer la $k^{\text{ième}}$ dérivée du polynôme P, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Si $k = 0$, par convention $P^{(0)} = P$.
Si $k \geqslant 1$, le polynôme dérivé d'ordre k, noté $P^{(k)}$, est défini par $P^{(k)} = \left(P^{(k-1)}\right)'$.

Exemple 8.9 Calculer les dérivées successives de $P : x \mapsto x^4 + 2x^2 - 1$.

$P'(x) = 4x^3 + 4x, \quad P''(x) = 12x^2 + 4, \quad P^{(3)}(x) = 24x, \quad P^{(4)}(x) = 24, \quad P^{(5)}(x) = 0.$

Remarque : Lorsque $\deg P = n, \ \forall k > n, \quad P^{(k)} = 0_{\mathbb{R}[x]}$

Exercice type 8.2 Calculer toutes les dérivées du polynôme $x \mapsto x^n$, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $Q : x \to x^n$.

- Pour $k > n$, on a $Q^{(k)} = 0_{\mathbb{R}[x]}$.
- Calculons les premières dérivées pour intuiter la formule. On a:

$$Q'(x) = nx^n, \quad Q''(x) = n(n-1)x^{n-2}, \quad Q^{(3)}(x) = n(n-1)(n-2)x^{(n-3)}\ldots$$

On conjecture donc que:

$$Q^{(k)}(x) = n(n-1)\ldots(n-(k-1))x^{n-k} = \left(\prod_{j=0}^{k-1}(n-j)\right)x^{n-k}.$$

On démontre ensuite ce résultat par récurrence. On pose pour $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\mathcal{P}(k) : \quad << Q^{(k)}(x) = \left(\prod_{j=0}^{k-1}(n-j)\right)x^{n-k} >>$$

Initialisation $(k = 1)$ On a $Q^{(1)}(x) = Q'(x) = nx^{n-1}$ et $\left(\prod_{j=0}^{0}(n-j)\right)x^{n-1} = nx^{n-1}$.

Ainsi, $\mathcal{P}(1)$ est vérifiée et la propriété est initialisée.

Hérédité Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie. On a $Q^{(k+1)}(x) = (Q^k)'(x)$. Or par hypothèse de récurrence, on a :

$$Q^{(k)}(x) = \left(\prod_{j=0}^{k-1}(n-j)\right)x^{n-k}.$$

Dérivons alors cette expression, on a:

$$(Q^{(k)})'(x) = \left(\prod_{j=0}^{k-1}(n-j)\right)(n-k)x^{n-k-1} = \left(\prod_{j=0}^{k}(n-j)\right)x^{n-(k+1)}.$$

Ainsi $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion La propriété étant initialisée et héréditaire, d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

On peut remarquer que $\left(\prod_{j=0}^{k-1}(n-j)\right) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$. Ainsi la formule peut s'écrire:

$$Q^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}.$$

Proposition 8.5 **(Formule de Taylor)** Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$ et $a \in \mathbb{R}$. Alors pour tout réel x,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Démonstration. Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$ alors P s'écrit $P(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j x^j$ avec $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ des réels.

• Commençons par montrer la formule de Taylor pour $a = 0$.
Soit $k \in [\![0, n]\!]$, d'après le résultat montré dans l'Exercice-type 8.2 et en utilisant la linéarité de la dérivation, on obtient:

$$P^{(k)}(x) = \sum_{j=k}^{n} \alpha_j \frac{j!}{(j-k)!}x^{j-k}.$$

Ainsi $P^{(k)}(0) = \alpha_k \dfrac{k!}{0!} = k!\alpha_k$. On a bien :

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{j!}x^j.$$

• Montrons le cas général. On se ramène au cas précédent en introduisant le polynôme

$Q(y) = P(y+a)$, d'inconnue $y = x - a$:

$$Q(y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{Q^{(k)}(0)}{k!} y^k$$

Dériver k fois la relation $Q(y) = P(y+a)$ donne ensuite $Q^{(k)}(y) = P^{(k)}(y+a)$ et en particulier $Q^{(k)}(0) = P^{(k)}(a)$. On obtient donc :

$$P(x) = Q(y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{Q^{(k)}(0)}{k!} y^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

$\square$

Exemple 8.10 Soit $P(x) = x^2 + 3x + 5$. Ecrire la formule de Taylor pour $a = 1$.

On a $P'(x) = 2x + 3, P''(x) = 2$ et donc pour $a = 1$, on obtient:

$$P(x) = 9 + \frac{5}{1}(x-1) + \frac{2}{2}(x-1)^2 = 9 + 5(x-1) + (x-1)^2.$$

8.4 Racines d'un polynôme

8.4.1 Définition

Définition 8.4 On dit que le réel α est une **racine** du polynôme P lorsque $P(\alpha) = 0$.

Remarque :

- *Le polynôme nul a une infinité de racines.*
- *Pour trouver des racines, on peut essayer de remplacer la variable x par -1, 1, 0, etc. Si on trouve 0, alors on dit que l'on a trouvé une « racine évidente ».*

Exemple 8.11

- Soit le polynôme $P : x \mapsto (x-5)(2x+1)(8-2x)$.
  Les réels 5, $-\frac{1}{2}$ et 4 sont ses trois racines.
- Soit le polynôme $Q : x \mapsto x^3 - 2x + 1$.
  Q admet 1 pour racine **évidente**.
- Soit le polynôme $R : x \mapsto x^4 + 1$.
  Ce polynôme n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^4 + 1 \geqslant 1 > 0$.

8.4.2 Racines et divisibilité

Théorème 8.3 Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors α est une racine de P ssi le polynôme $x-\alpha$ divise P. Autrement dit, ssi il existe un polynôme Q non nul tel que pour tout $x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x-\alpha)Q(x)$.

Démonstration. On montre cette équivalence par double implication.
($\Longleftarrow$) Si $(x-\alpha)$ divise P, il existe un polynôme Q tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x-\alpha)Q(x)$. Alors en prenant $x = \alpha$, on obtient: $P(\alpha) = (\alpha-\alpha)Q(\alpha) = 0$ d'où α est racine du polynôme de P.
($\Longrightarrow$) Supposons α racine de P. La division euclidienne de P par $(x-\alpha)$ donne l'existence d'un unique couple de polynômes (Q,R) tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = Q(x)(x-\alpha) + R(x) \tag{8.1}$$

avec $R = 0$ ou $\deg(R) < \deg(x-\alpha) = 1$.
Donc R est un polynôme constant et s'écrit $R : x \mapsto c$. Il nous reste alors à montrer que $c = 0$. Remplaçons x par α dans l'égalité 8.1. Cela donne $P(\alpha) = 0 + c$ donc $c = 0$. □

Exemple 8.12 1 est racine de x^2-1 et donc $x-1$ divise x^2-1.

Généralisation

Théorème 8.4 Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_p$, p réels 2 à 2 distincts. Alors $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont p racines de P ssi le polynôme $x \mapsto (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots\left(x-\alpha_p\right)$ divise P.

Démonstration. La réciproque est évidente, il suffit donc de montrer le sens direct.
On suppose que $\alpha_1, \alpha_2, \dots\ \alpha_p$ sont des racines de P, et on va montrer par récurrence que $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_p)$ divise P. Pour cela, on pose $\forall k \in [\![1,p]\!]$,

$$\mathcal{H}(k) : \quad «(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_k) \text{ divise } P».$$

Initialisation $(k=1)$ Directement vérifiée en appliquant le Théorème 8.3. Ainsi $\mathcal{H}(1)$ est vraie.

Hérédité Soit $k \in [\![1,p-1]\!]$. On suppose que $\mathcal{H}(k)$ est vraie, montrons que $\mathcal{H}(k+1)$ est vraie. $\mathcal{H}(k)$ étant vraie, il existe $A \in \mathbb{R}[x]$ tel que

$$P(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_k)A(x).$$

Comme $k+1 \leqslant p$, alors α_{k+1} est racine de P et $P(\alpha_{k+1}) = 0$. Mais comme les α_i sont supposés distincts deux à deux $(\alpha_{k+1}-\alpha_1)(\alpha_{k+1}-\alpha_2)\dots(\alpha_{k+1}-\alpha_k) \neq 0$. Donc nécessairement $A(\alpha_{k+1}) = 0$ et α_{k+1} est racine de A. Par le Théorème 8.3, il existe alors $C \in \mathbb{R}[x]$ tel que $A(x) = (x-\alpha_{k+1})C(x)$. Donc

$$P(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_k)(x-\alpha_{k+1})C(x).$$

Ce qui montre $H(k+1)$.

Conclusion La propriété étant initialisée et héréditaire, d'après le principe de récurrence, $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $H(k)$ est vraie. En particulier $H(p)$ est vraie, ce qui termine la preuve. □

Proposition 8.6 Un polynôme de degré inférieur ou égal à n et qui possède au moins $n+1$ racines distinctes est le polynôme nul.

Remarque :

- *Par contraposée, tout polynôme non nul de degré n admet au plus n racines.*
- *En particulier, tout polynôme qui admet une infinité de racines est le polynôme nul.*

Démonstration. Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Si P admet $r_1, r_2, \dots, r_{n+1}$ comme racines distinctes, le corollaire précédent donne l'existence d'un polynôme Q tel que:

$$P(x) = (x - r_1)(x - r_2)\dots(x - r_{n+1})\,Q(x).$$

Par propriétés du degré, cela donne $\deg(P) = n+1+\deg(Q)$. Comme par hypothèse, $\deg(P) \leqslant n$, cela implique que $Q = 0$, et donc $P = 0$. □

8.4.3 Ordre de multiplicité d'une racine

Définition 8.5 Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que α est une racine d'ordre de multiplicité $k \in \mathbb{N}^*$ de P si $P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

Remarque :

- *En particulier α est racine* ***simple*** *de P si $P(\alpha) = 0$ et $P'(\alpha) \neq 0$*
- *α est racine* ***double*** *de P si $P(\alpha) = 0$, $P'(\alpha) = 0$ et $P''(\alpha) \neq 0$.*
- *L'ordre de multiplicité d'une racine est inférieure au degré du polynôme.*

Exemple 8.13 On considère $P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2$. Est-ce que 1 est racine, et si oui avec quelle multiplicité?

$P(1) = 1 - 2 + 3 - 4 + 2 = 0$, donc 1 est racine. On calcule la dérivée :

$$P'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 6x - 4.$$

$P'(1) = 4 - 6 + 6 - 4 = 0$, donc 1 est racine d'ordre au moins 2. On calcule la dérivée seconde :

$$P''(x) = 12x^2 - 12x + 6.$$

$P''(1) = 12 - 12 + 6 = 6 \neq 0$. Donc 1 est racine d'ordre 2 de P.

Théorème 8.5 Soit $P \in \mathbb{R}[x]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, et $k \in \mathbb{N}^*$.
Alors α est racine d'ordre k de P ssi il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x-\alpha)^k Q(x)$$

avec $Q(\alpha) \neq 0$. Autrement dit ssi $(x-\alpha)^k$ divise P, mais $(x-\alpha)^{k+1}$ ne divise plus P.

*Remarque : En particulier, α est racine **double** si $(x-\alpha)^2$ divise P mais que $(x-\alpha)^3$ ne divise pas P.*

Démonstration. Montrons l'équivalence par double inclusion.
($\Longrightarrow$) Supposons que $\alpha \in \mathbb{R}$ soit une racine d'ordre k de P i.e.

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = \ldots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(k)}(\alpha) \neq 0,$$

alors en utilisant la formule de Taylor pour P, on obtient (avec n le degré de P): Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{P^{(j)}(\alpha)}{j!}(x-\alpha)^j = \sum_{j=k}^{n} \frac{P^{(j)}(\alpha)}{j!}(x-\alpha)^j = (x-\alpha)^k \left[\sum_{j=k}^{n} \frac{P^{(j)}(\alpha)}{j!}(x-\alpha)^{j-k}\right] = (x-\alpha)^k Q(x)$$

en posant $Q : x \mapsto \displaystyle\sum_{j=k}^{n} \frac{P^{(j)}(\alpha)}{j!}(x-\alpha)^{j-k} \in \mathbb{R}[x]$. Il reste alors à vérifier que $Q(\alpha) = \dfrac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} + 0 \neq 0$ pour conclure.
($\Longleftarrow$) Soit P un polynôme. Montrons le résultat par récurrence.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on pose la propriété $\mathcal{H}(k)$: « si il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x-\alpha)^k Q(x)$ avec $Q(\alpha) \neq 0$ alors $P(\alpha) = P'(\alpha) = \ldots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$ ».

Intialisation ($k = 1$) Si il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x-\alpha)Q(x)$ avec $Q(\alpha) \neq 0$, alors $P(\alpha) = 0$. De plus, $P'(x) = Q(x) + (x-\alpha)Q'(x)$ donc $P'(\alpha) = Q(\alpha) + 0 \neq 0$.
Ainsi $\mathcal{H}(1)$ est vraie et la propriété est initialisée.

Hérédité Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons maintenant que la propriété $\mathcal{H}(k)$ est vraie, et montrons la propriété que la propriété $\mathcal{H}(k+1)$ est vraie.
On part donc de l'existence de $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x-\alpha)^{k+1}Q(x)$ avec $Q(\alpha) \neq 0$. L'astuce ici est d'appliquer l'hypothèse de récurrence au polynôme P'.
On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P'(x) = (k+1)(x-\alpha)^k Q(x) + (x-\alpha)^{k+1} Q'(x) = (x-\alpha)^k \tilde{Q}(x)$$

où l'on a posé $\tilde{Q} : x \mapsto (k+1)Q(x) + (x-\alpha)Q'(x)$.
Comme $\tilde{Q}(\alpha) = (k+1)Q(\alpha) + 0 \neq 0$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à P'.
On en déduit donc que $P'(\alpha) = 0 = (P')'(\alpha) = \ldots = (P')^{(k-1)}(\alpha)$ et $(P')^{(k)}(\alpha) \neq 0$. C'est-à-dire $P'(\alpha) = 0 = P''(\alpha) = \ldots = P^{(k)}(\alpha)$ et $P^{(k+1)}(\alpha) \neq 0$.
Comme de plus, $P(\alpha) = 0$, on en déduit le résultat voulu, $\mathcal{H}(k+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion La propriété étant initialisée et héréditaire, d'après le principe de récurrence, $\mathcal{H}(k)$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

□

8.5 Factorisation

8.5.1 Cas des polynômes de degré 2

Théorème 8.6 Soit le polynôme $P : x \longrightarrow ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

- Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ alors P admet deux racines réelles simples distinctes $r_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. Le polynôme P se factorise alors sous la forme :
$$P(x) = a(x - r_1)(x - r_2).$$
- Si $\Delta = 0$ alors P admet une racine double $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$. Le polynôme P se factorise alors sous la forme :
$$P(x) = a(x - x_0)^2.$$
- Si $\Delta < 0$, P n'admet aucune racine réelle et le polynôme P ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$.

8.5.2 Factorisation sur deux exemples

Un premier exemple

Factoriser au maximum le polynôme $P(x) = x^3 - 7x - 6$.

$P(-1) = 0$ donc -1 est une racine évidente de P. Calculons son ordre de multiplicité. On a $P'(x) = 3x^2 - 7x$ donc $P'(-1) = 10 \neq 0$. Ainsi 1 est racine simple de P.
Donc $P(x) = x^3 - 7x - 6$ est factorisable par $x+1$. C'est à dire qu'il existe un polynôme Q de degré 2 tel que $P(x) = (x+1)Q(x)$.
Procédons à la division euclidienne de $x^3 - 7x - 6$ par $x+1$:

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & & -7x & -6 & x+1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & -x^2 & & & x^2 - x - 6 \\ \cline{1-2}
 & -x^2 & -7x & & \\
 & x^2 & +x & & \\ \cline{2-3}
 & & -6x & -6 & \\
 & & 6x & +6 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

donc

$$x^3 - 7x - 6 = (x+1)(x^2 - x - 6)$$

Il reste à factoriser le polynôme $Q(x) = x^2 - x - 6$. Pour cela, il suffit d'utiliser les résultats de la partie précédente. On a:

$$\Delta = 25, \quad r_1 = -2 \quad \text{et} \quad r_2 = 3.$$

Ainsi $Q(x) = (x+2)(x-3)$. En résumé, on a obtenu $\boxed{P(x) = (x+1)(x-2)(x-3)}$.

Un deuxième exemple

Factoriser au maximum le polynôme $P(x) = x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6$.

Une racine évidente est $x_0 = 1$. Calculons l'ordre de multiplicité de cette racine. On a:

$$P'(x) = 4x^3 - 21x^2 + 34x - 17,$$

donc $P'(1) = 0$. Ainsi 1 est racine au moins double. Calculons la dérivée seconde, on a:

$$P''(x) = 12x^2 - 42x + 34,$$

donc $P''(1) = 4 \neq 0$.
Ainsi 1 est racine double de P et il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que $P(x) = (x-1)^2 Q(x)$.
On sait que $\deg(P) = 4$ et que $\deg((x-1)^2 Q(x)) = 2 + \deg(Q)$. Ainsi $\deg(Q) = 2$. On cherche donc a, b, c des réels tels que

$$P(x) = (x-1)^2(ax^2 + bx + c).$$

Développons le membre de droite, on a:

$$(x^2 - 2x + 1)(ax^2 + bx + c) = ax^4 + (b-2a)x^3 + (c - 2b + a)x^2 + (-2c + b)x + c$$

Ce polynôme est égal à P si et seulement si ses coefficients sont égaux à ceux de P:

$$\left\{\begin{array}{ccc} a & = & 1 \\ b - 2a & = & -7 \\ c - 2b + a & = & 17 \\ -2c + b & = & -17 \\ c & = & 6 \end{array}\right. \quad \text{donc :} \quad \left\{\begin{array}{ccc} a & = & 1 \\ b & = & -5 \\ c & = & 6 \end{array}\right.. \text{ Ainsi } P(x) = (x-1)^2(x^2 - 5x + 6).$$

Il nous reste à factoriser le polynôme Q. Pour cela, il suffit d'utiliser les résultats de la partie précédente. On a:

$$\Delta = 1, \quad r_1 = 3 \quad \text{et} \quad r_2 = 2.$$

Ainsi $Q(x) = (x-2)(x-3)$. En résumé, on a obtenu $\boxed{P(x) = (x-1)^2(x-2)(x-3)}$.

8.5.3 Forme factorisée

Proposition 8.7 **(Admis)** Tout polynôme de $\mathbb{R}[x]$ peut s'écrire comme produit d'un réel, de polynômes de degré 1 et de polynômes de degré 2 n'ayant pas de racine réelle. Autrement dit, tout polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$ peut se décomposer sous la forme suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = a_n \prod_{i=1}^{k} (x - \alpha_i)^{r_i} \prod_{j=1}^{l} (x^2 + b_j x + c_j)$$

où

- a_n est le coefficient dominant de P;
- les α_i sont les racines réelles de P, de multiplicités respectives $r_i \in \mathbb{N}^*$;
- les trinômes $x \to x^2 + b_j x + c_j$ sont de discriminant strictement négatif.