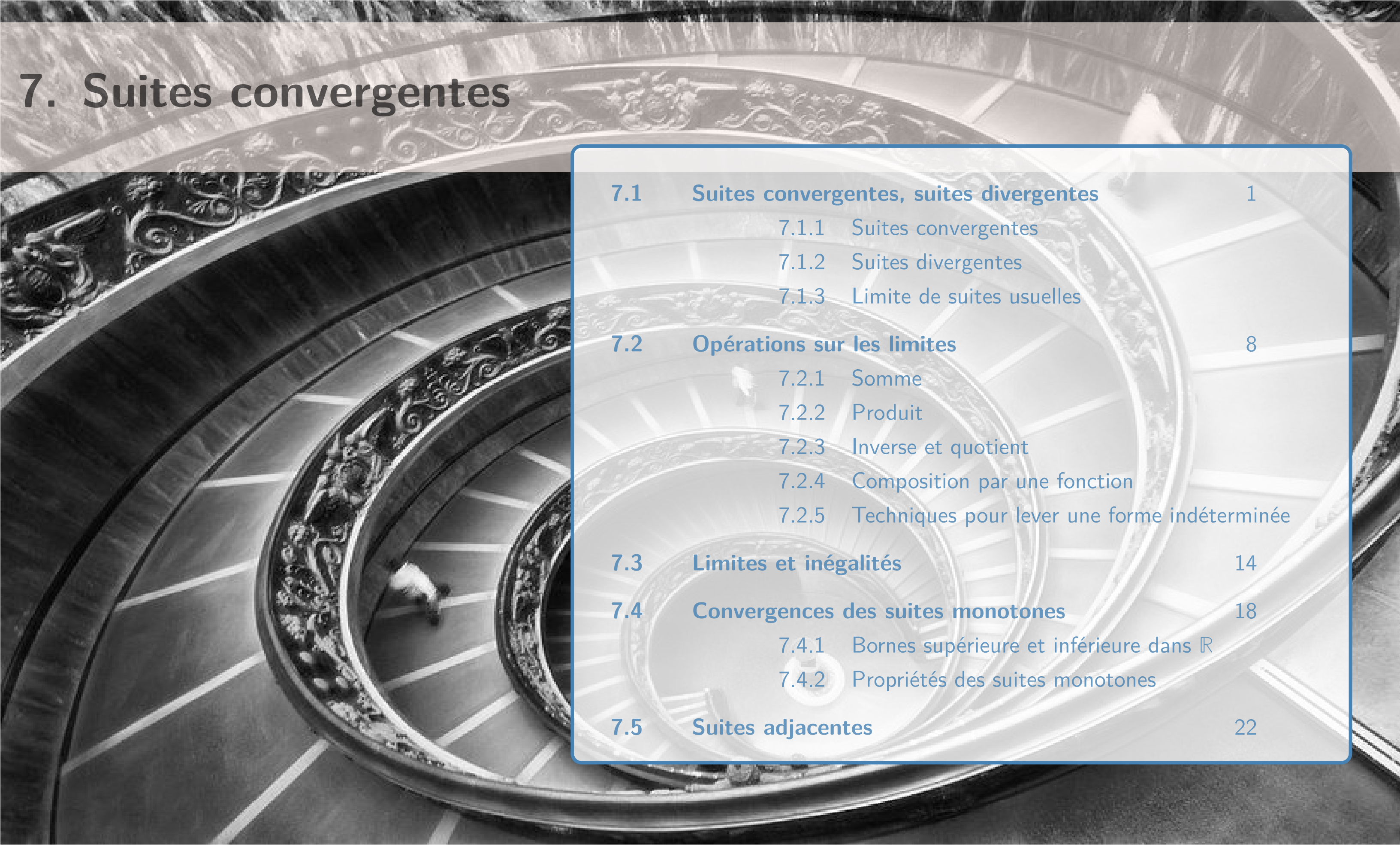


7. Suites convergentes

7.1 Suites convergentes, suites divergentes 1
- 7.1.1 Suites convergentes
- 7.1.2 Suites divergentes
- 7.1.3 Limite de suites usuelles

7.2 Opérations sur les limites 8
- 7.2.1 Somme
- 7.2.2 Produit
- 7.2.3 Inverse et quotient
- 7.2.4 Composition par une fonction
- 7.2.5 Techniques pour lever une forme indéterminée

7.3 Limites et inégalités 14

7.4 Convergences des suites monotones 18
- 7.4.1 Bornes supérieure et inférieure dans $\mathbb{R}$
- 7.4.2 Propriétés des suites monotones

7.5 Suites adjacentes 22

> En mathématiques, on ne comprend pas les choses, on s'y habitue.
>
> *John von Neumann*

Ce chapitre est consacré à la deuxième partie de l'étude des suites réelles. Plus précisément, on étudie ici la convergence d'une suite réelle et le comportement asymptotique des suites usuelles.

7.1 Suites convergentes, suites divergentes

7.1.1 Suites convergentes

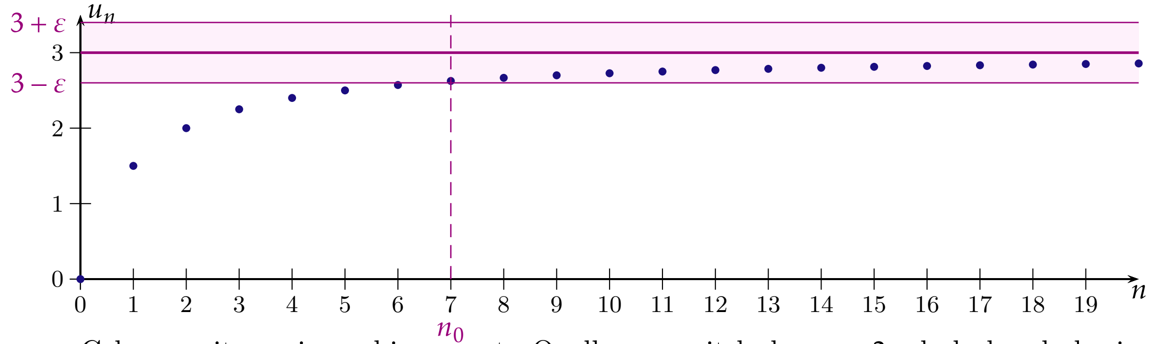
Un premier exemple

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{3n}{n+1}$. On cherche à déterminer le comportement asymptotique de u_n *i.e.* le comportement de u_n lorsque $n \to +\infty$.

Voici quelques valeurs numériques de u_n :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...	100	1000
u_n	0	1.5	2	2.25	2.4	2.5	2.57	2.625	2.67	2.7	...	2.97	2.997

On remarque que plus n augmente, plus les valeurs de u_n sont proches de 3.



Cela se voit aussi graphiquement. Quelle que soit la largeur 2ε de la bande horizontale centrée sur la droite d'équation $y = 3$, il existe un rang à partir duquel tous les points de la représentation graphique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont situés dans cette bande.

On dit alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** vers 3.

Définitions et exemples

Définition 7.1 Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** vers un réel ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite, sauf un nombre fini d'entre eux.

Remarque : La définition ci-dessus est celle du programme officiel. Elle est équivalente aux deux définitions suivantes.

Définition 7.2

- Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** vers un réel ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
- Une suite (u_n) **converge** vers un réel ℓ si:

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists n_0 \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geqslant n_0 \qquad |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Remarque :

- *Autrement dit, une suite (u_n) converge vers ℓ si tous les termes u_n sont aussi proches que l'on veut du réel ℓ dès que n est suffisamment grand. En effet:*

$$|u_n - \ell| < \varepsilon \iff -\varepsilon < u_n - \ell < \varepsilon \iff \ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$$

Aussi petit que soit l'intervalle que l'on prend autour du réel ℓ (i.e. aussi proche de zéro que soit le réel ε), les valeurs u_n de la suite vont finir par être toutes dans l'intervalle $]\ell-\varepsilon;\ell+\varepsilon[$, à condition qu'on attende suffisamment longtemps (i.e. que n soit suffisamment grand).

- *On retiendra que :*

$$|u_n - \ell| < \varepsilon \iff u_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[.$$

- *La dernière définition reste vraie si on remplace « $<$ » par « $\leqslant$ ».*

Exemple 7.1 Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a^n$ avec $a \in]0;1[$ converge vers 0.

Exercice 7.1 Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\sqrt{n}v_n$ converge vers 1. Montrer qu'il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ \frac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant v_n \leqslant \frac{3}{2\sqrt{n}}.$$

Définition 7.3 Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **convergente** lorsqu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Proposition 7.1 (Unicité de la limite) Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ_1 et vers un réel ℓ_2, alors $\ell_1 = \ell_2$.

Démonstration. **À connaître**

□

Définition 7.4 Si une suite (u_n) converge vers un réel ℓ, ce nombre unique ℓ s'appelle **la limite** de la suite (u_n) et on note:

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$$

<u>Remarque</u> : on peut aussi écrire de manière plus allégée $\ell = \lim u_n$ car pour une suite, il n'y a aucune ambiguïté: on ne peut considérer que la limite quand n tend vers $+\infty$.

Proposition 7.2 Toute suite convergente est bornée.

Démonstration.

□

Attention ! La réciproque de cette proposition est fausse (nous le verrons un peu plus loin) !

Proposition 7.3 Soit (u_n) une suite réelle alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \ell.$$

Démonstration. Voir Exercice $\boxed{16}$ du TD n°7. □

Proposition 7.4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes:

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \iff u_n - \ell \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \iff |u_n - \ell| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En particulier, pour $\ell = 0$, on a :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \iff |u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exemple 7.2 (Classique) Soit $a \in]-1;1[$ alors la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

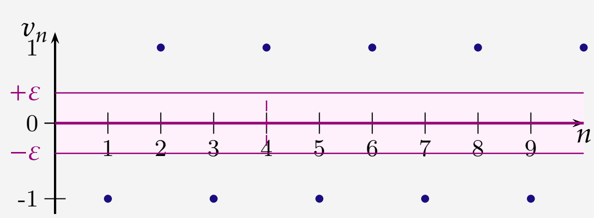
7.1.2 Suites divergentes

Définition 7.5 Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente**.

Exemple 7.3

1. Soit (u_n) la suite définie par: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = n$.

2. Soit (v_n) la suite définie par: $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = (-1)^n$.



Attention ! La suite (v_n) est bornée mais non convergente, donc la réciproque de la proposition indiquant que toute suite convergente est bornée est fausse.

Définition 7.6 Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **diverge** vers $+\infty$ si u_n prend des valeurs positives aussi grandes que l'on veut, pourvu que l'on choisisse n suffisamment grand. On écrit :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

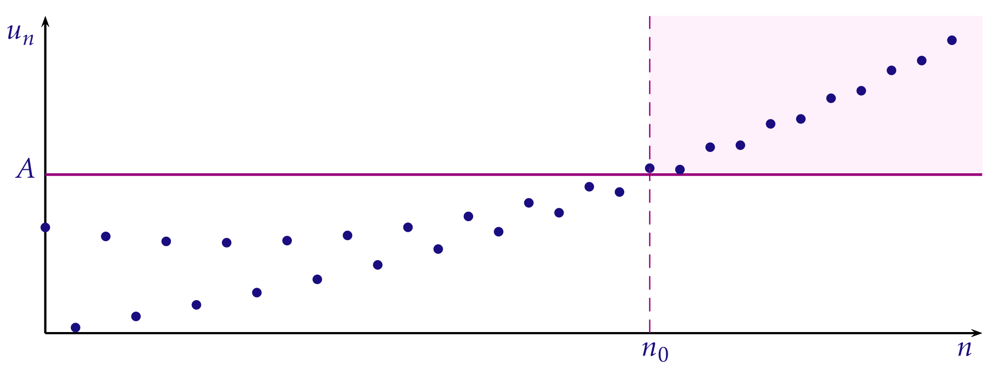
Rigoureusement, on dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R} \qquad \exists n_0 \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geqslant n_0 \qquad u_n > A.$$

Exemple 7.4

- Soit (u_n) la suite définie par: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = n$. Alors (u_n) diverge vers
- Soit (v_n) la suite définie par: $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = n^2$. Alors (v_n) diverge vers
- Soit (w_n) la suite définie par: $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = \ln(n)$. Alors (w_n) diverge vers

La Définition 7.6 peut être illustrée par le graphe suivant :



Définition 7.7 Une suite (u_n) **diverge** vers $-\infty$ si u_n prend des valeurs négatives aussi grandes que l'on veut, pourvu que l'on choisisse n suffisamment grand. On écrit :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty.$$

Rigoureusement, on dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R} \qquad \exists n_0 \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geqslant n_0 \qquad u_n < A.$$

Exemple 7.5
- Soit (u_n) la suite définie par: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = -n$. Alors (u_n) diverge vers
- Soit (v_n) la suite définie par: $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = -7\sqrt{n} + 10$. Alors (v_n) diverge vers

7.1.3 Limite de suites usuelles

Etudier **la nature d'une suite** c'est dire si elle est convergente ou divergente et déterminer sa limite éventuelle.
Pour cela, on essaie de modifier l'écriture du terme général de notre suite pour faire apparaître des suites connues dont on connaît les limites.

Proposition 7.5 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = n^\alpha$. Alors on a :
- Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$.
- Si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = 0$.

Exemple 7.6
- Soit (u_n) la suite définie par: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = n^2$.
- Soit (u_n) la suite définie par: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{1}{n}$.

Proposition 7.6 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = q^n$ pour $q \in \mathbb{R}$. Alors on a:
- Si $q \in]-1;1[$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
- Si $q > 1$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
- Si $q \leqslant -1$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
- Si $q = 1$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

Exemple 7.7
- Soit (u_n) la suite définie par: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 7^n$.
- Soit (v_n) la suite définie par: $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.
- Soit (w_n) la suite définie par: $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = 2 \times (-5)^n$.

7.2 Opérations sur les limites

7.2.1 Somme

Proposition 7.7 Soient (u_n) et (v_n) deux suites ayant une limite finie ou infinie. Alors la suite $(u_n + v_n)$ a une limite donnée par le tableau suivant:

$\lim u_n$ \ $\lim v_n$	$-\infty$	ℓ'	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	FI
ℓ	$-\infty$	$\ell+\ell'$	$+\infty$
$+\infty$	FI	$+\infty$	$+\infty$

Exemple 7.8

1. Étudions la limite éventuelle de la suite (u_n) définie par:
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = n^2 - n.$$

2. Étudions la limite éventuelle de la suite (u_n) définie par:
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = 2 + \frac{1}{n}.$$

7.2.2 Produit

Proposition 7.8 Soit (u_n) une suite et soit λ dans $\mathbb{R}^*$.

- si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda u_n = \lambda\ell$.
- si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda u_n = \pm\infty$.

Exemple 7.9 On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -12\ln(n) =$.

Proposition 7.9 Soient (u_n) et (v_n) deux suites ayant une limite finie ou infinie. Alors la suite $(u_n v_n)$ a une limite donnée par le tableau suivant:

$\lim u_n$ \ $\lim v_n$	$-\infty$	$\ell' \in \mathbb{R}_-^*$	0	$\ell' \in \mathbb{R}_+^*$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$	$-\infty$
$\ell \in \mathbb{R}_-^*$	$+\infty$	$\ell\ell'$	0	$\ell\ell'$	$-\infty$
0	FI	0	0	0	FI
$\ell \in \mathbb{R}_+^*$	$-\infty$	$\ell\ell'$	0	$\ell\ell'$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	FI	$+\infty$	$+\infty$

Exemple 7.10 Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \mathrm{e}^{-n}\left(1 - \frac{2}{n}\right)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Etudions la convergence de cette suite.

7.2.3 Inverse et quotient

Définition 7.8

- Soit (u_n) une suite convergente vers 0 en étant positive à partir d'un certain rang, alors on note: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^+$
- Soit (u_n) une suite convergente vers 0 en étant négative à partir d'un certain rang, alors on note: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^-$

Exemple 7.11 On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} =$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-7}{n} =$

Proposition 7.10 Soit (u_n) une suite qui ne s'annule pas à partir d'un certain rang et ayant une limite finie ou infinie.
Alors la limite de la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ est donnée par le tableau suivant:

$\lim u_n$	0	0^-	0^+	$\ell \in \mathbb{R}^*$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim 1/u_n$	FI	$-\infty$	$+\infty$	$1/\ell$	0	0

Pour calculer la limite d'un quotient, il suffit de remarquer que sous de bonnes hypothèses:

$$\frac{u_n}{v_n} = u_n \times \frac{1}{v_n}$$

Exemple 7.12 Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \dfrac{\ln(n)}{2+\dfrac{1}{n}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Etudions sa convergence.

*<u>Remarque</u> : De ces trois derniers paragraphes, on pourra notamment retenir qu'il y a **4 formes indéterminées.***

$$\frac{\infty}{\infty}, \qquad \frac{0}{0}, \qquad \infty\times 0, \qquad +\infty-\infty$$

En cas de formes indéterminées, il y a un vrai travail à fournir pour « lever » l'indétermination.

Quelques techniques sont proposées au paragraphe suivant. D'autres outils seront exposés au second semestre.

7.2.4 Composition par une fonction

Proposition 7.11 Soit (u_n) une suite, soient $\ell, L \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ et soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant ℓ. On suppose que:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$
- $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in I$
- $\lim\limits_{x\to\ell} f(x) = L$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = L$.

Exemple 7.13

1. Étudions la limite éventuelle de la suite (u_n) définie par:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \exp\left(-\frac{1}{n^2}\right).$$

2. Étudions la limite éventuelle de la suite (v_n) définie par:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad v_n = \sqrt{5+\frac{2}{n^2}}.$$

3. Étudions la limite éventuelle de la suite (w_n) définie par:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad w_n = \sin\left(\frac{1}{2^n}\right).$$

7.2.5 Techniques pour lever une forme indéterminée

Lever une indétermination par croissance comparée

Théorème 7.1 (Croissance comparée)

- Pour tout réel $a > 0$ et pour tout réel $b > 0$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln(n))^b}{n^a} = 0$.
- Pour tout réel $a > 0$ et pour tout réel $q \in]-1;1[$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^a q^n = 0$.
- Pour tout réel $a > 0$ et pour tout réel $q > 1$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^a}{q^n} = 0$.
- Pour tout $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{q^n}{n!} = 0$ et pour tout $q \in]0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n!q^n = +\infty$.

Remarque : Soient a et b deux nombres réels. Soit q un réel strictement positif.

1. *La suite $(n!)_n$ « l'emporte » sur les suites $(q^n)_n$, $(n^a)_n$ et $(\ln(n)^b)_n$.*
2. *La suite $(q^n)_n$ « l'emporte » sur les suites $(n^a)_n$ et $(\ln(n)^b)_n$.*
3. *La suite $(n^a)_n$ « l'emporte » sur la suite $(\ln(n)^b)_n$.*

*En bref, cela signifie que si l'on effectue un **produit** ou un **quotient** de deux de ces suites, la limite est celle de la suite qui « l'emporte ».*

Remarque : e^n rentre dans le cadre de ce théorème en prenant $q = e$. On pourra alors retenir la règle suivante : « la factorielle l'emporte sur l'exponentielle qui l'emporte sur les puissances qui l'emportent sur le logarithme.»

Attention ! La croissance comparée **ne s'applique pas** pour des sommes ou des différences.

Exemple 7.14 Etudions la convergence des suites ci-dessous :

1. $u_n = \dfrac{2^n}{n^{100}}$.

2. $v_n = \dfrac{\ln(n)}{n}$.

3. $w_n = n^3 e^{-2n}$.

Remarque : Attention à ne pas voir de la croissance comparée partout. Par exemple, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{e^{-n}}{\ln(n)} = 0$ *par les propriétés du quotient, il n'y a pas de forme indéterminée.*

Lever une indétermination par factorisation

Lorsqu'une forme indéterminée ne peut pas être levée à l'aide de la croissance comparée, il faut essayer de la lever en factorisant notre expression par le terme prépondérant (Celui qui va le plus vite vers l'infini).

Exemple 7.15 Dans chacun des cas, cherchons la limite de la suite de terme général :

1. $u_n = n^5 - n^2 + 3$.

2. $v_n = \dfrac{-2n^3 + 2n}{n^3 + 1}$

3. $w_n = \mathrm{e}^n - n^{100} - \ln(n)^{100000}$

4. $r_n = \sqrt{4n^2 + n} - n$

Pour résumer, pour lever une forme indéterminée, il faudra appliquer la méthode suivante:

Méthode 7.1 (Pour lever une forme indéterminée)

1. S'assurer qu'il s'agit bien d'une forme indéterminée.
2. Voir si la forme indéterminée peut être levée à l'aide du théorème de croissance comparée. Dans ce cas-là, on peut directement conclure en précisant bien « par croissance comparée » sur la copie.
3. Sinon, on se ramène à un des deux cas précédents en factorisant par le terme prépondérant.
4. Parfois, il faudra être encore plus rusé pour se ramener aux deux premiers cas (expression conjuguée par exemple).

Exercice 7.2 Étudier la limite éventuelle de la suite (v_n) définie par:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_n = \sqrt{n^2+1} - n.$$

Remarque : A noter qu'il existe des calculs de limite qui nécessitent des méthodes bien plus complexes et même certaines limites pour lesquelles on ne connaît pas encore de méthode.

7.3 Limites et inégalités

Théorème 7.2 (Passage à la limite dans une inégalité) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes, vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité $u_n \leqslant v_n$. On a alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Remarque : Le résultat reste vraie avec l'hypothèse $u_n \leqslant v_n$ vérifiée à partir d'un certain rang.

Attention ! Si on a $u_n < v_n$ comme hypothèse à la place de $u_n \leqslant v_n$, la conclusion reste identique, à savoir $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$: les inégalités strictes deviennent larges après passage à la limite.

Démonstration.

□

Théorème 7.3 (Théorème d'encadrement) Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites. On suppose que:

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$
- (u_n) et (v_n) sont convergentes vers une même limite ℓ.

Alors la suite (w_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$.

<u>*Remarque*</u> *:*

- *Ce théorème donne à la fois* ***l'existence*** *et* ***la valeur*** *de la limite.*
- *Le résultat reste vrai avec l'hypothèse $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$ vérifiée à partir d'un certain rang.*
- *On appelle parfois ce théorème le « théorème des gendarmes » mais préférez l'appellation « théorème d'encadrement ».*

Démonstration. **A connaître**

□

Exemple 7.16 Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Grâce au théorème d'encadrement, on peut montrer que la suite $(u_n)_n$ converge et on peut calculer sa limite quand n tend vers l'infini.

Exercice type 7.1 Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}.$$

1. Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \dfrac{n}{n^2+k} \leqslant \dfrac{n}{n^2+1}$.
2. En sommant les inégalités précédentes pour k allant de 1 à n, montrer que

$$\frac{n}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{n^2}{n^2+1}.$$

3. En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

Correction :

1.

2.

3.

Pour les suites qui divergent plus $\pm\infty$, on a le théorème suivant :

Théorème 7.4 **(Théorème de comparaison)** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leqslant v_n.$$

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration.

□

<u>Remarque</u> : Le théorème de comparaison reste vrai si l'hypothèse $u_n \leqslant v_n$ est vérifiée à partir d'un certain rang.

Exemple 7.17 Étudions la limite éventuelle de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = 8^n + (-1)^n.$$

7.4 Convergences des suites monotones

7.4.1 Bornes supérieure et inférieure dans $\mathbb{R}$

Définition 7.9 (Majorant, minorant) Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

- Un majorant de A est un élément M de $\mathbb{R}$ tel que $\forall x \in A, \quad x \leqslant M$.
- Un minorant de A est un élément m de $\mathbb{R}$ tel que $\forall x \in A, \quad x \geqslant m$.

Définition 7.10 (Maximum, minimum) Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

- On dit que M est le maximum de A si $\underline{M \in A}$ et $\forall x \in A, \quad x \leqslant M$.
- On dit que m est le minimum de A si $\underline{m \in A}$ et $\forall x \in A, \quad x \geqslant m$.

<u>Remarque</u> : Un ensemble A ne possède pas nécessairement de majorant ou minorant, et s'ils existent, ils ne sont pas uniques.
De même, A n'admet pas nécessairement de maximum ou minimum. En revanche, s'ils existent, ils sont uniques.

Exemple 7.18 Que dire des ensembles suivants?

- $\mathbb{R}$,
- $[0, +\infty[$

- $[0,5]$ et $[0,5[$

Définition 7.11 (Borne supérieure d'une partie de $\mathbb{R}$) Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que $M \in \mathbb{R}$ est une borne supérieure de A si:

1. pour tout $x \in A$, $x \leqslant M$.
2. si M' est un majorant de A, alors $M \leqslant M'$.

Définition 7.12 (Borne inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$) Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que $m \in \mathbb{R}$ est une borne inférieure de A si:

1. pour tout $x \in A$, $m \leqslant x$.
2. si m' est un minorant de A, alors $m' \leqslant m$.

Remarque :

- *La borne supérieure (si elle existe) est le plus petit majorant d'un ensemble. Quand il existe le maximum coïncide avec la borne supérieure.*
- *La borne inférieure (si elle existe) est le plus grand minorant d'un ensemble. Quand il existe le minimum coïncide avec la borne inférieure.*
- *Si une partie A non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (respectivement inférieure), alors celle-ci est unique. On la note* $\mathrm{Sup}(A)$ *ou* $\mathrm{In}f(A)$.

Théorème 7.5 (Propriété de la borne supérieure) Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure).

Exemple 7.19 Soit $A = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Déterminer (s'ils existent): la borne supérieure de A, le maximum de A, la borne inférieure de A, le minimum de A.

7.4.2 Propriétés des suites monotones

Théorème 7.6 (Théorème de convergence monotone)

- Toute suite croissante et majorée est **convergente**. Plus précisément, si une suite (u_n) est croissante et majorée par un réel M, alors la suite (u_n) converge vers une limite ℓ qui vérifie $\ell \leqslant M$.
- Toute suite décroissante et minorée est **convergente**. Plus précisément, si une suite (u_n) est décroissante et minorée par un réel m, alors la suite (u_n) converge vers une limite ℓ qui vérifie $\ell \geqslant m$.

Attention ! On n'a pas nécessairement $\ell = M$! Ainsi, la suite (u_n) définie par $u_n = 7 - \dfrac{1}{n}$ est croissante et majorée par $M = 8$, mais aussi par $M' = 10$ et pourtant $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 7$.

Remarque : Le Théorème de convergence monotone peut se réécrire comme suit:

- *Toute suite croissante et majorée converge vers ℓ, sa borne supérieure.*
- *Toute suite décroissante et minorée converge vers ℓ, sa borne inférieure.*

L'existence de la borne supérieure ou inférieure est assurée par le Théorème de la borne supérieure : $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble de réels non vide, qui admet un majorant quand la suite est majorée, et un minorant quand elle est minorée.

Exercice type 7.2 On considère la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

1. Montrer que la suite (S_n) est croissante.
2. Dans cette question, on va montrer que la suite (S_n) est majorée par 2.

   (a) Montrer que pour tout entier $k \geqslant 2$, $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$.

(b) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 - \frac{1}{n}$.

(c) En déduire que $(S_n)_n$ est majorée par 2.

3. Conclure.

Correction:

1.

2.

3.

Remarque : *On peut démontrer (mais nous l'admettrons) que la suite* (S_n) *converge vers* $\frac{\pi^2}{6} \simeq 1,6449340668$.

En Python : *Écrire un programme qui calcule une valeur approchée de* $\frac{\pi^2}{6}$.

On peut constater que le programme renvoie $S_{10000} \simeq 1,6448340718$. *Les trois premières décimales coïncident donc avec celles de la limite.*

Proposition 7.12
- Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.
- Toute suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.

7.5 Suites adjacentes

Définition 7.13 Deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites **adjacentes** si elles vérifient les 3 conditions suivantes:

- (u_n) est croissante
- (v_n) est décroissante
- $\lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Théorème 7.7 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et de plus:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Démonstration. **A comprendre**

□

Exercice type 7.3 Soient (u_n) et (v_n) définies respectivement par:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Conclure.

Correction :

Remarque : On peut démontrer (et nous l'admettrons provisoirement) que les suites (u_n) *et* (v_n) *convergent vers* $\mathrm{e} \simeq 2.718281828459045$.

En Python : Écrire un programme qui calcule une valeur approchée de e.

On peut constater que le programme renvoie $u_{10} \simeq 2.7182818$. *Il suffit de calculer* u_{10} *pour avoir les 7 premières décimales de* e. *Cette suite converge bien plus « vite » que celle de l'Exercice-type 7.2.*