

# 7. Suites convergentes

<b>7.1</b>	<b>Suites convergentes, suites divergentes</b>	<b>1</b>
7.1.1	Suites convergentes	
7.1.2	Suites divergentes	
7.1.3	Limite de suites usuelles	
<b>7.2</b>	<b>Opérations sur les limites</b>	<b>8</b>
7.2.1	Somme	
7.2.2	Produit	
7.2.3	Inverse et quotient	
7.2.4	Composition par une fonction	
7.2.5	Techniques pour lever une forme indéterminée	
<b>7.3</b>	<b>Limites et inégalités</b>	<b>14</b>
<b>7.4</b>	<b>Convergences des suites monotones</b>	<b>18</b>
7.4.1	Bornes supérieure et inférieure dans $\mathbb{R}$	
7.4.2	Propriétés des suites monotones	
<b>7.5</b>	<b>Suites adjacentes</b>	<b>22</b>

En mathématiques, on ne comprend pas les choses, on s’y habitue.

*John von Neumann*

*Ce chapitre est consacré à la deuxième partie de l’étude des suites réelles. Plus précisément, on étudie ici la convergence d’une suite réelle et le comportement asymptotique des suites usuelles.*

## 7.1 Suites convergentes, suites divergentes

### 7.1.1 Suites convergentes

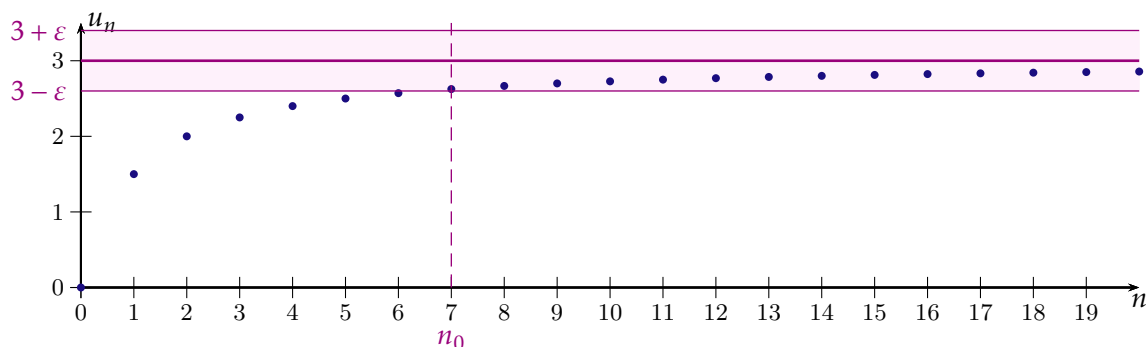
#### Un premier exemple

Considérons la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_n = \frac{3n}{n+1}$ . On cherche à déterminer le comportement asymptotique de  $u_n$  i.e. le comportement de  $u_n$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

Voici quelques valeurs numériques de  $u_n$  :

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...	100	1000
$u_n$	0	1.5	2	2.25	2.4	2.5	2.57	2.625	2.67	2.7	...	2.97	2.997

On remarque que plus  $n$  augmente, plus les valeurs de  $u_n$  sont proches de 3.



Cela se voit aussi graphiquement. Quelle que soit la largeur  $2\varepsilon$  de la bande horizontale centrée sur la droite d'équation  $y = 3$ , il existe un rang à partir duquel tous les points de la représentation graphique de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont situés dans cette bande.

On dit alors que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **converge** vers 3.

### Définitions et exemples

**Définition 7.1** Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **converge** vers un réel  $\ell$  si tout intervalle ouvert contenant  $\ell$  contient tous les termes de la suite, sauf un nombre fini d'entre eux.



*Remarque :* La définition ci-dessus est celle du programme officiel. Elle est équivalente aux deux définitions suivantes.

**Définition 7.2** • Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **converge** vers un réel  $\ell$  si tout intervalle ouvert contenant  $\ell$  contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

- Une suite  $(u_n)$  **converge** vers un réel  $\ell$  si:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad |u_n - \ell| < \varepsilon.$$



*Remarque :*

- Autrement dit, une suite  $(u_n)$  converge vers  $\ell$  si tous les termes  $u_n$  sont aussi proches que l'on veut du réel  $\ell$  dès que  $n$  est suffisamment grand. En effet:

$$|u_n - \ell| < \varepsilon \iff -\varepsilon < u_n - \ell < \varepsilon \iff \ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$$

Aussi petit que soit l'intervalle que l'on prend autour du réel  $\ell$  (i.e. aussi proche de zéro que soit le réel  $\varepsilon$ ), les valeurs  $u_n$  de la suite vont finir par être toutes dans l'intervalle  $]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[$ , à condition qu'on attende suffisamment longtemps (i.e. que  $n$  soit suffisamment grand).

- On retiendra que :

$$|u_n - \ell| < \varepsilon \iff u_n \in ]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[.$$

- La dernière définition reste vraie si on remplace «  $<$  » par «  $\leq$  ».

**Exemple 7.1** Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a^n$  avec  $a \in ]0; 1[$  converge vers 0.

On raisonne par Analyse-Synthèse.

**Analyse:**

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on cherche  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq n_0, |a^n| \leq \varepsilon$ . Commençons par remarquer que  $|a^n| = a^n$  car  $a > 0$ . On a alors les équivalences suivantes:

$$a^n \leq \varepsilon \iff \ln(a^n) \leq \ln(\varepsilon) \iff n \ln(a) \leq \ln(\varepsilon) \iff n \geq \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(a)} \text{ car } a < 1.$$

- Si  $\varepsilon \leq 1$ , on a notre candidat pour  $n_0$ . Il s'agit de  $\left\lfloor \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(a)} \right\rfloor + 1$ .
- Si  $\varepsilon > 1$ , l'inégalité  $a^n \leq \varepsilon$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Synthèse:**

Soit  $\varepsilon > 0$ .

- Si  $\varepsilon > 1$ , on a pour tout  $n \in \mathbb{N}, a^n \leq \varepsilon$  car  $a < 1$  et la fonction  $x \mapsto x^n$  est croissante. Ainsi pour tout  $n \in \mathbb{N}, a^n \leq 1 \leq \varepsilon$ .
- Supposons alors  $\varepsilon < 1$ . Posons  $n_0 = \left\lfloor \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(a)} \right\rfloor + 1 \in \mathbb{N}$ . On a alors pour  $n \geq n_0$ ,

$$a^n = e^{n \ln(a)} \leq e^{n_0 \ln(a)} \leq e^{\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(a)} \ln(a)} = e^{\ln(\varepsilon)} = \varepsilon.$$

On a donc bien montré que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existait  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0, a^n \leq \varepsilon$ . Cela signifie que la suite  $(a^n)$  converge vers 0.

**Exercice 7.1** Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle telle que  $\sqrt{nv_n}$  converge vers 1. Montrer qu'il existe un  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \geq n_0, \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq v_n \leq \frac{3}{2\sqrt{n}}.$$

Traduisons avec des quantificateurs l'hypothèse: «  $\sqrt{nv_n}$  converge vers 1 ».

Soit  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0, |\sqrt{nv_n} - 1| \leq \varepsilon$ . Ceci équivaut alors à, pour tout  $n \geq n_0$ :

$$1 - \varepsilon \leq \sqrt{nv_n} \leq 1 + \varepsilon$$

et encore à, pour tout  $n \geq n_0$ :

$$\frac{1 - \varepsilon}{\sqrt{n}} \leq v_n \leq \frac{1 + \varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Choisissons  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  et on obtient le résultat voulu.

**Définition 7.3** Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite **convergente** lorsqu'il existe  $\ell \in \mathbb{R}$  tel que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell$ .

**Proposition 7.1 (Unicité de la limite)** Si une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un réel  $\ell_1$  et vers un réel  $\ell_2$ , alors  $\ell_1 = \ell_2$ .

*Démonstration. À connaître*

Raisonnons par l'absurde et supposons que  $\ell_1 \neq \ell_2$ . Par définition de la limite, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, |u_n - \ell_1| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2, |u_n - \ell_2| \leq \varepsilon.$$

Soit  $n \geq \max(n_1, n_2)$  alors par inégalité triangulaire, on a :

$$|\ell_1 - \ell_2| = |\ell_1 - u_n + u_n - \ell_2| \leq |\ell_1 - u_n| + |u_n - \ell_2| \leq 2\varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout  $\varepsilon > 0$ , on peut choisir  $\varepsilon = \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{3} > 0$ . On a alors :

$$|\ell_1 - \ell_2| \leq \frac{2}{3} |\ell_1 - \ell_2|.$$

Absurde. D'où  $\ell_1 = \ell_2$  et l'unicité de la limite. □

**Définition 7.4** Si une suite  $(u_n)$  converge vers un réel  $\ell$ , ce nombre unique  $\ell$  s'appelle **la limite** de la suite  $(u_n)$  et on note :

$$\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$



*Remarque* : on peut aussi écrire de manière plus allégée  $\ell = \lim u_n$  car pour une suite, il n'y a aucune ambiguïté : on ne peut considérer que la limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Proposition 7.2** Toute suite convergente est bornée.

*Démonstration.* Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite qui converge vers un réel  $\ell$ . On considère l'intervalle ouvert  $I = ]\ell - 1, \ell + 1[$ . Par définition de la limite, il existe un entier  $n_0$  tel que

$$\forall n \geq n_0, u_n \in ]\ell - 1, \ell + 1[.$$

Donc  $\forall n \geq n_0, \ell - 1 \leq u_n \leq \ell + 1$ .

Soit un entier  $n \in \mathbb{N}$  quelconque, on a donc :

$$\min(u_0, u_1, \dots, u_{n_0-1}, \ell - 1) \leq u_n \leq \max(u_0, u_1, \dots, u_{n_0-1}, \ell + 1)$$

Le maximum ou minimum d'un nombre fini de termes existant toujours, cela termine la preuve et la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien bornée. □



**Attention !** La réciproque de cette proposition est fautive (nous le verrons un peu plus loin) !

**Proposition 7.3** Soit  $(u_n)$  une suite réelle alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \ell \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = \ell.$$

*Démonstration.* Voir Exercice 16 du TD n°7. □

**Proposition 7.4** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle et  $\ell \in \mathbb{R}$ . On a les équivalences suivantes:

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \iff u_n - \ell \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \iff |u_n - \ell| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

En particulier, pour  $\ell = 0$ , on a :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \iff |u_n| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

**Exemple 7.2 (Classique)** Soit  $a \in ]-1; 1[$  alors la suite  $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0.

On a pour tout  $n \in \mathbb{N}$ :  $|a^n| = |a|^n$ . Or si  $a \in ]-1; 1[$ ,  $|a| \in ]0; 1[$ . En utilisant le résultat démontré dans l'Exemple 7.1, on obtient que  $(|a|^n)_n$  converge vers 0. On en conclut avec la première égalité que  $|a^n| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  et que donc  $a^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  d'après la Proposition 7.4.

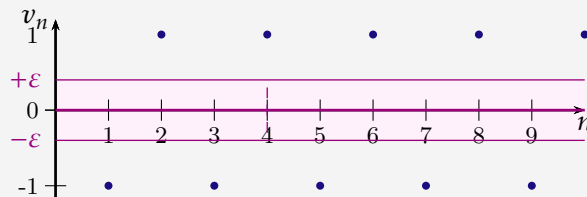
## 7.1.2 Suites divergentes

**Définition 7.5** Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente**.

**Exemple 7.3** 1. Soit  $(u_n)$  la suite définie par:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = n$ .

Cette suite n'est pas majorée, donc elle n'est pas bornée, donc elle n'est pas convergente. En effet, on a l'implication convergente  $\Rightarrow$  bornée, donc par contraposition on a l'implication non bornée  $\Rightarrow$  divergente.

2. Soit  $(v_n)$  la suite définie par:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = (-1)^n$ .



Raisonnons par l'absurde et supposons que  $(v_n)$  converge vers un réel  $\ell$ . Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$ . Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{2n} = \ell$  donc par unicité de la limite, on aurait  $\ell = 1$ . De même, on aurait  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -1 = -1$  et aussi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{2n+1} = \ell$  donc par unicité de la limite, on aurait  $\ell = -1$ . Donc  $-1 = 1$ : absurde! Ainsi, on a montré que la suite  $(v_n)$  est divergente.



**Attention !** La suite  $(v_n)$  est bornée mais non convergente, donc la réciproque de la proposition indiquant que toute suite convergente est bornée est fausse.

**Définition 7.6** Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **diverge** vers  $+\infty$  si  $u_n$  prend des valeurs positives aussi grandes que l'on veut, pourvu que l'on choisisse  $n$  suffisamment grand. On écrit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

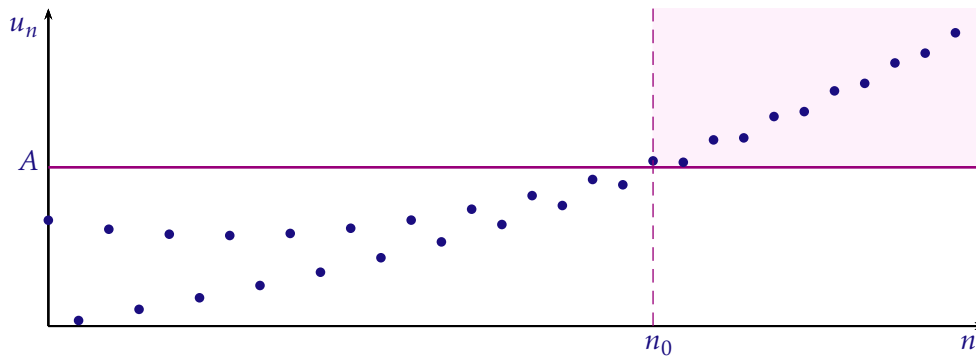
Rigoureusement, on dit qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $+\infty$  si :

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad u_n > A.$$

**Exemple 7.4** • Soit  $(u_n)$  la suite définie par:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = n$ . Alors  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$ .

- Soit  $(v_n)$  la suite définie par:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = n^2$ . Alors  $(v_n)$  diverge vers  $+\infty$ .
- Soit  $(w_n)$  la suite définie par:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = \ln(n)$ . Alors  $(w_n)$  diverge vers  $+\infty$ .

La Définition 7.6 peut être illustrée par le graphe suivant :



**Définition 7.7** Une suite  $(u_n)$  **diverge** vers  $-\infty$  si  $u_n$  prend des valeurs néglatives aussi grandes que l'on veut, pourvu que l'on choisisse  $n$  suffisamment grand. On écrit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$$

Rigoureusement, on dit qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $-\infty$  si :

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad u_n < A.$$

- Exemple 7.5**
- Soit  $(u_n)$  la suite définie par:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = -n$ . Alors  $(u_n)$  diverge vers  $-\infty$ .
  - Soit  $(v_n)$  la suite définie par:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = -7\sqrt{n} + 10$ . Alors  $(v_n)$  diverge vers  $-\infty$ .

### 7.1.3 Limite de suites usuelles

Etudier la **nature d'une suite** c'est dire si elle est convergente ou divergente et déterminer sa limite éventuelle.

Pour cela, on essaie de modifier l'écriture du terme général de notre suite pour faire apparaître des suites connues dont on connaît les limites.

**Proposition 7.5** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = n^\alpha$ . Alors on a :

- Si  $\alpha > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty$ .
- Si  $\alpha < 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = 0$ .

**Exemple 7.6**

- Soit  $(u_n)$  la suite définie par:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = n^2$ .  
Alors  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$ .

- Soit  $(u_n)$  la suite définie par:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{1}{n}$ .  
Alors  $(u_n)$  converge vers 0.

**Proposition 7.6** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite définie par:  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n$  pour  $q \in \mathbb{R}$ . Alors on a:

- Si  $q \in ]-1; 1[$ ,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0.
- Si  $q > 1$ ,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $+\infty$ .
- Si  $q < -1$ ,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge.
- Si  $q = 1$ ,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est stationnaire.

**Exemple 7.7**

- Soit  $(u_n)$  la suite définie par:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 7^n$ .  
Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  car  $7 > 1$ .

- Soit  $(v_n)$  la suite définie par:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ .  
Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$  car  $-\frac{1}{3} \in ]-1; 1[$ .

- Soit  $(w_n)$  la suite définie par:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = 2 \times (-5)^n$ .  
Alors la suite  $(w_n)$  n'a pas de limite.

## 7.2 Opérations sur les limites

### 7.2.1 Somme

**Proposition 7.7** Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites ayant une limite finie ou infinie. Alors la suite  $(u_n + v_n)$  a une limite donnée par le tableau suivant:

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$-\infty$	$\ell'$	$+\infty$
$-\infty$		$-\infty$	$-\infty$	<i>FI</i>
$\ell$		$-\infty$	$\ell + \ell'$	$+\infty$
$+\infty$		<i>FI</i>	$+\infty$	$+\infty$

**Exemple 7.8** 1. Étudions la limite éventuelle de la suite  $(u_n)$  définie par:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = n^2 - n.$$

On sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$  et que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-n) = -\infty$ . Nous obtenons donc une forme indéterminée et nous ne sommes pas encore en mesure de déterminer la limite de  $u_n$ .

2. Étudions la limite éventuelle de la suite  $(u_n)$  définie par:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2 + \frac{1}{n}.$$

On sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 = 2$  et que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ . Ainsi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$ .

### 7.2.2 Produit

**Proposition 7.8** Soit  $(u_n)$  une suite et soit  $\lambda$  dans  $\mathbb{R}^*$ .

- si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda u_n = \lambda \ell$ .
- si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \pm\infty$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda u_n = \pm\infty$ .

**Exemple 7.9** On sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) = +\infty$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -12 \ln(n) = -\infty$ .



**Proposition 7.9** Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites ayant une limite finie ou infinie. Alors la suite  $(u_n v_n)$  a une limite donnée par le tableau suivant:

$\lim u_n \quad \lim v_n$	$-\infty$	$\ell' \in \mathbb{R}_-^*$	$0$	$\ell' \in \mathbb{R}_+^*$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	<i>FI</i>	$-\infty$	$-\infty$
$\ell \in \mathbb{R}_-^*$	$+\infty$	$\ell\ell'$	$0$	$\ell\ell'$	$-\infty$
$0$	<i>FI</i>	$0$	$0$	$0$	<i>FI</i>
$\ell \in \mathbb{R}_+^*$	$-\infty$	$\ell\ell'$	$0$	$\ell\ell'$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	<i>FI</i>	$+\infty$	$+\infty$

**Exemple 7.10** Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_n = e^{-n} \left(1 - \frac{2}{n}\right)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . Etudions la convergence de cette suite.

On sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0$  ainsi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{2}{n} = 1$ . De plus, on sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$ . On en conclut que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

### 7.2.3 Inverse et quotient

**Définition 7.8** • Soit  $(u_n)$  une suite convergente vers 0 en étant positive à partir d'un certain rang, alors on note:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0^+$

• Soit  $(u_n)$  une suite convergente vers 0 en étant négative à partir d'un certain rang, alors on note:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0^-$

**Exemple 7.11** On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0^+$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-7}{n} = 0^-$ .

**Proposition 7.10** Soit  $(u_n)$  une suite qui ne s'annule pas à partir d'un certain rang et ayant une limite finie ou infinie.

Alors la limite de la suite  $\left(\frac{1}{u_n}\right)$  est donnée par le tableau suivant:

$\lim u_n$	$0$	$0^-$	$0^+$	$\ell \in \mathbb{R}^*$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim 1/u_n$	<i>FI</i>	$-\infty$	$+\infty$	$1/\ell$	$0$	$0$

Pour calculer la limite d'un quotient, il suffit de remarquer que sous de bonnes hypothèses:

$$\frac{u_n}{v_n} = u_n \times \frac{1}{v_n}$$

**Exemple 7.12** Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par  $u_n = \frac{\ln(n)}{2 + \frac{1}{n}}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Étudions sa convergence.

On sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{n} = 2$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$ . On sait également que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) = +\infty$ . Or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) \times \frac{1}{2 + \frac{1}{n}}.$$

Ainsi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .



*Remarque :* De ces trois derniers paragraphes, on pourra notamment retenir qu'il y a **4 formes indéterminées**.

$$\frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad \infty \times 0, \quad +\infty - \infty$$

En cas de formes indéterminées, il y a un vrai travail à fournir pour « lever » l'indétermination.

Quelques techniques sont proposées au paragraphe suivant. D'autres outils seront exposés au second semestre.

### 7.2.4 Composition par une fonction

**Proposition 7.11** Soit  $(u_n)$  une suite, soient  $\ell, L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  et soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  contenant  $\ell$ . On suppose que:

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
- $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in I$
- $\lim_{x \rightarrow \ell} f(x) = L$

Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = L$ .

**Exemple 7.13** 1. Étudions la limite éventuelle de la suite  $(u_n)$  définie par:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \exp\left(-\frac{1}{n^2}\right).$$

On sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n^2} = 0$  et que  $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$  donc par composée de limites,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ .

2. Étudions la limite éventuelle de la suite  $(v_n)$  définie par:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = \sqrt{5 + \frac{2}{n^2}}.$$

On sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5 + \frac{2}{n^2} = 5$  et que  $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x} = \sqrt{5}$  donc par composée de limites,  
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \sqrt{5}$ .

3. Étudions la limite éventuelle de la suite  $(w_n)$  définie par:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = \sin\left(\frac{1}{2^n}\right).$$

On sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$  car  $\frac{1}{2} \in ]-1; 1[$  et que  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0$  donc par composée de limites,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$ .

### 7.2.5 Techniques pour lever une forme indéterminée

#### Lever une indétermination par croissance comparée

##### Théorème 7.1 (Croissance comparée)

- Pour tout réel  $a > 0$  et pour tout réel  $b > 0$ , on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(n))^b}{n^a} = 0$ .
- Pour tout réel  $a > 0$  et pour tout réel  $q \in ]-1; 1[$ , on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^a q^n = 0$ .
- Pour tout réel  $a > 0$  et pour tout réel  $q > 1$ , on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^a}{q^n} = 0$ .
- Pour tout  $q > 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q^n}{n!} = 0$  et pour tout  $q \in ]0, 1[$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n! q^n = +\infty$ .

Remarque : Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels. Soit  $q$  un réel strictement positif.

1. La suite  $(n!)_n$  « l'emporte » sur les suites  $(q^n)_n$ ,  $(n^a)_n$  et  $(\ln(n)^b)_n$ .
2. La suite  $(q^n)_n$  « l'emporte » sur les suites  $(n^a)_n$  et  $(\ln(n)^b)_n$ .
3. La suite  $(n^a)_n$  « l'emporte » sur la suite  $(\ln(n)^b)_n$ .

En bref, cela signifie que si l'on effectue un **produit** ou un **quotient** de deux de ces suites, la limite est celle de la suite qui « l'emporte ».

Remarque :  $e^n$  rentre dans le cadre de ce théorème en prenant  $q = e$ . On pourra alors retenir la règle suivante : « la factorielle l'emporte sur l'exponentielle qui l'emporte sur les puissances qui l'emportent sur le logarithme. »

**Attention !** La croissance comparée **ne s'applique pas** pour des sommes ou des différences.



**Exemple 7.14** Etudions la convergence des suites ci-dessous :

$$1. u_n = \frac{2^n}{n^{100}}.$$

On remarque tout d'abord que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{100} = +\infty$ , nous sommes donc face à une forme indéterminée. On peut la lever grâce au théorème ci-dessus qui nous donne  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{100}}{2^n} = 0^+$ . On a alors par passage à l'inverse :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

$$2. v_n = \frac{\ln(n)}{n}.$$

On est bien face à une forme indéterminée et grâce au théorème ci-dessus, on peut conclure que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ .

$$3. w_n = n^3 e^{-2n}.$$

On remarque que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$  et que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-2n} = 0$ . Nous sommes bien face à une FI. Nous pouvons la lever grâce au point 2 du théorème précédent car  $e^{-2} \in ]-1; 1[$ . Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0.$$



*Remarque* : Attention à ne pas voir de la croissance comparée partout. Par exemple,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-n}}{\ln(n)} = 0$  par les propriétés du quotient, il n'y a pas de forme indéterminée.

### Lever une indétermination par factorisation

Lorsqu'une forme indéterminée ne peut pas être levée à l'aide de la croissance comparée, il faut essayer de la lever en factorisant notre expression par le terme prépondérant (Celui qui va le plus vite vers l'infini).

**Exemple 7.15** Dans chacun des cas, cherchons la limite de la suite de terme général :

$$1. u_n = n^5 - n^2 + 3.$$

Il s'agit bien d'une forme indéterminée. On factorise alors par le terme prépondérant, ici  $n^5$ , on obtient :

$$u_n = n^5 \left( 1 - \frac{n^2}{n^5} + \frac{3}{n^5} \right) = n^5 \left( 1 - \frac{1}{n^3} + \frac{3}{n^5} \right).$$

On sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^5 = +\infty$ . On sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n^5} = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n^3} + \frac{3}{n^5} = 1$ . Puis on conclut par propriété du produit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

$$2. v_n = \frac{-2n^3 + 2n}{n^3 + 1}$$

Il s'agit bien d'une forme indéterminée. On factorise alors par le terme prépondérant au numérateur et au dénominateur, ici  $-2n^3$  au numérateur et  $n^3$  au dénominateur, on obtient :

$$v_n = \frac{-2n^3 \left(1 + \frac{2n}{-2n^3}\right)}{n^3 \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)} = -2 \times \frac{1 - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^3}}.$$

On a alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n^2} = 1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n^3} = 1$  donc par opérations sur les limites, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -2.$$

$$3. w_n = e^n - n^{100} - \ln(n)^{100000}$$

Il s'agit bien d'une forme indéterminée. On factorise alors par le terme prépondérant, ici  $e^n$ , on obtient :

$$w_n = e^n \left(1 - \frac{n^{100}}{e^n} - \frac{\ln(n)^{100000}}{e^n}\right).$$

Par croissance comparée, on a que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{100}}{e^n} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)^{100000}}{e^n} = 0$ . Ainsi par opérations sur les limites, on obtient:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty.$$

$$4. r_n = \sqrt{4n^2 + n} - n$$

Il s'agit bien d'une forme indéterminée. On factorise alors par le terme prépondérant, ici  $n$ , on obtient :

$$r_n = n \left( \frac{\sqrt{4n^2 + n}}{n} - 1 \right) = n \left( \sqrt{\frac{4n^2 + n}{n^2}} - 1 \right) = n \left( \sqrt{4 + \frac{1}{n}} - 1 \right).$$

On a alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{4 + \frac{1}{n}} = \sqrt{4} = 2$  et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{4 + \frac{1}{n}} - 1 \right) = 1$ . On conclut par opérations sur les limites que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = +\infty.$$

Pour résumer, pour lever une forme indéterminée, il faudra appliquer la méthode suivante:

- Méthode 7.1 (Pour lever une forme indéterminée)**
1. S'assurer qu'il s'agit bien d'une forme indéterminée.
  2. Voir si la forme indéterminée peut être levée à l'aide du théorème de croissance comparée. Dans ce cas-là, on peut directement conclure en précisant bien « par croissance comparée » sur la copie.
  3. Sinon, on se ramène à un des deux cas précédents en factorisant par le terme prépondérant.
  4. Parfois, il faudra être encore plus rusé pour se ramener aux deux premiers cas (expression conjuguée par exemple).

**Exercice 7.2** Étudier la limite éventuelle de la suite  $(v_n)$  définie par:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \sqrt{n^2 + 1} - n.$$

Il s'agit bien d'une forme indéterminée. Ici l'astuce consiste à multiplier par la quantité conjuguée pour se débarrasser du signe -.

$$v_n = \sqrt{n^2 + 1} - n \times \frac{\sqrt{n^2 + 1} + n}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \frac{n^2 + 1 - n^2}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n}.$$

Nous ne sommes alors plus en présence d'une forme indéterminée et nous pouvons conclure que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0.$$



*Remarque :* A noter qu'il existe des calculs de limite qui nécessitent des méthodes bien plus complexes et même certaines limites pour lesquelles on ne connaît pas encore de méthode.


### 7.3 Limites et inégalités

**Théorème 7.2 (Passage à la limite dans une inégalité)** Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites convergentes, vérifiant pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'inégalité  $u_n \leq v_n$ . On a alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$



*Remarque :* Le résultat reste vraie avec l'hypothèse  $u_n \leq v_n$  vérifiée à partir d'un certain rang.

**Attention !** Si on a  $u_n < v_n$  comme hypothèse à la place de  $u_n \leq v_n$ , la conclusion reste identique, à savoir  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ : les inégalités strictes deviennent larges après passage à la limite. 

*Démonstration.* On raisonne par l'absurde : supposons que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n > \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ .

La suite  $(u_n - v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge alors vers  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n > 0$ .

Par définition de la convergence,  $]0, +\infty[$  contient tous les termes  $u_n - v_n$  sauf un nombre fini. Il existe donc  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N, u_n - v_n > 0$ .

C'est en contradiction avec l'hypothèse de l'énoncé. Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ .  $\square$

**Théorème 7.3 (Théorème d'encadrement)** Soient  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  trois suites. On suppose que:

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq w_n \leq v_n$
- $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont convergentes vers une même limite  $\ell$ .

Alors la suite  $(w_n)$  converge et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$ .

Remarque :

- Ce théorème donne à la fois l'**existence** et la **valeur** de la limite.
- Le résultat reste vrai avec l'hypothèse  $u_n \leq w_n \leq v_n$  vérifiée à partir d'un certain rang.
- On appelle parfois ce théorème le « théorème des gendarmes » mais préférez l'appellation « théorème d'encadrement ».

*Démonstration.* **A connaître**

On sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$ . Ainsi pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  tels que pour tout  $n \geq n_1, u_n \in ]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[$  et pour tout  $n \geq n_2, v_n \in ]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[$ .

Or pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $u_n \leq w_n \leq v_n$ . On obtient donc pour  $n \geq n_3 := \max(n_1, n_2)$ :

$$\ell - \varepsilon < u_n \leq w_n \leq v_n < \ell + \varepsilon.$$

Ainsi pour  $n \geq n_3, w_n \in ]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[$ . Cela signifie que la suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et que sa limite vaut  $\ell$ .  $\square$

**Exemple 7.16** Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par  $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ . Grâce au théorème d'encadrement, on peut montrer que la suite  $(u_n)_n$  converge et on peut calculer sa limite quand  $n$  tend vers l'infini.

En effet, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1.$$

Ainsi, on a pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\frac{-1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{n} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ , donc d'après le théorème d'encadrement, la suite  $(u_n)_n$  converge et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

**Exercice type 7.1** Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k}.$$

1. Montrer que pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\frac{1}{n+1} \leq \frac{n}{n^2+k} \leq \frac{n}{n^2+1}$ .
2. En sommant les inégalités précédentes pour  $k$  allant de 1 à  $n$ , montrer que

$$\frac{n}{n+1} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}.$$

3. En déduire que la suite  $(u_n)_n$  converge et déterminer sa limite.

**Correction :**

1. Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a :  $1 \leq k \leq n$  et donc  $n^2+1 \leq n^2+k \leq n^2+n$ . On en déduit que

$$\frac{1}{n^2+1} \geq \frac{1}{n^2+k} \geq \frac{1}{n^2+n}, \quad \text{la fonction inverse étant décroissante}$$

Multiplions ces inégalités par  $n$  et écrivons les dans le « bon » sens, on obtient :

$$\frac{n}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2+k} \leq \frac{n}{n^2+1}.$$

Or  $\frac{n}{n^2+n} = \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1}$ , on obtient le résultat voulu, à savoir que pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{n}{n^2+k} \leq \frac{n}{n^2+1}.$$



2. Comme demandé, sommons ces inégalités pour  $k$  variant de 1 à  $n$ , on obtient :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+n}.$$

Or

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n 1 = \frac{1}{n+1} \times n = \frac{n}{n+1},$$

et

$$\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+n} = \frac{n}{n^2+n} \sum_{k=1}^n 1 = \frac{n}{n^2+n} \times n = \frac{n^2}{n^2+n}.$$

Ainsi on obtient pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\frac{n}{n+1} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+n}.$$

3. Calculons la limite de  $\frac{n}{n+1}$ . On remarque c'est une forme indéterminée, on écrit alors :

$$\frac{n}{n+1} = \frac{n}{n\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ , on en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ .

De même, calculons la limite de  $\frac{n^2}{n^2+n}$ . On remarque c'est une forme indéterminée, on écrit alors :

$$\frac{n^2}{n^2+n} = \frac{n^2}{n^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ , on en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2+n} = 1$ .

Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, la suite  $(u_n)$  converge et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ .

Pour les suites qui divergent plus  $\pm\infty$ , on a le théorème suivant :

**Théorème 7.4 (Théorème de comparaison)** Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n.$$

- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ , alors la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est divergente et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ .
- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ , alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est divergente et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .

*Démonstration.* On montre le premier résultat, le deuxième se montre de la même manière. Soit  $A > 0$ . D'après les hypothèses, il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que :

$$n \geq n_0 \implies u_n > A.$$

Or  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq v_n$  donc pour  $n \geq n_0$ , on a (en combinant les deux inégalités) :

$$v_n \geq u_n > A.$$

Donc pour  $n \geq n_0$ ,  $v_n > A$ . Autrement dit, la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $+\infty$ .  $\square$



*Remarque* : Le théorème de comparaison reste vrai si l'hypothèse  $u_n \leq v_n$  est vérifiée à partir d'un certain rang.

**Exemple 7.17** Étudions la limite éventuelle de la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 8^n + (-1)^n.$$

On a pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $8^n + (-1)^n \geq 8^n - 1$ . Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 8^n = +\infty$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 8^n - 1 = +\infty$ .  
Ainsi la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est divergente et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

## 7.4 Convergences des suites monotones

### 7.4.1 Bornes supérieure et inférieure dans $\mathbb{R}$

**Définition 7.9 (Majorant, minorant)** Soit  $A$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ .

- Un majorant de  $A$  est un élément  $M$  de  $\mathbb{R}$  tel que  $\forall x \in A, \quad x \leq M$ .
- Un minorant de  $A$  est un élément  $M$  de  $\mathbb{R}$  tel que  $\forall x \in A, \quad x \geq M$ .

**Définition 7.10 (Maximum, minimum)** Soit  $A$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ .

- On dit que  $M$  est le maximum de  $A$  si  $\underline{M \in A}$  et  $\forall x \in A, \quad x \leq M$ .
- On dit que  $M$  est le minimum de  $A$  si  $\underline{M \in A}$  et  $\forall x \in A, \quad x \geq M$ .



*Remarque* : Un ensemble  $A$  ne possède pas nécessairement de majorant ou minorant, et s'ils existent, ils ne sont pas uniques.

De même,  $A$  n'admet pas nécessairement de maximum ou minimum. En revanche, s'ils existent, ils sont uniques.

**Exemple 7.18** Que dire des ensembles suivants?

- $\mathbb{R}$ , ne possède ni majorant ni minorant donc ni maximum ni minimum
- $[0, +\infty[$  ne possède pas de majorants, ni de maximum. En revanche possède un minimum : 0.

- $[0,5]$  et  $[0,5[$  possèdent des majorants: 5,6,10, ou plus généralement tout réel  $x \geq 5$ . L'ensemble  $[0,5]$  possède également un maximum : 5 , alors que  $[0,5[$  ne possède pas de maximum.  
Les deux ensembles possèdent des minorants :  $-1, -0.5, 0$  et 0 est même un minimum pour les deux.

**Définition 7.11 (Borne supérieure d'une partie de  $\mathbb{R}$ )** Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$ . On dit que  $M \in \mathbb{R}$  est une borne supérieure de  $A$  si:

1. pour tout  $x \in A$ ,  $x \leq M$ .
2. si  $M'$  est un majorant de  $A$ , alors  $M \leq M'$ .

**Définition 7.12 (Borne inférieure d'une partie de  $\mathbb{R}$ )** Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$ . On dit que  $m \in \mathbb{R}$  est une borne inférieure de  $A$  si:

1. pour tout  $x \in A$ ,  $m \leq x$ .
2. si  $m'$  est un minorant de  $A$ , alors  $m' \leq m$ .

Remarque :

- La borne supérieure (si elle existe) est le plus petit majorant d'un ensemble. Quand il existe le maximum coïncide avec la borne supérieure.
- La borne inférieure (si elle existe) est le plus grand minorant d'un ensemble. Quand il existe le minimum coïncide avec la borne inférieure.
- Si une partie  $A$  non vide de  $\mathbb{R}$  admet une borne supérieure (respectivement inférieure), alors celle-ci est unique. On la note  $\text{Sup}(A)$  ou  $\text{Inf}(A)$ .



**Théorème 7.5 (Propriété de la borne supérieure)** Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de  $\mathbb{R}$  admet une borne supérieure (resp. inférieure).

**Exemple 7.19** Soit  $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$ . Déterminer (s'ils existent): la borne supérieure de  $A$ , le maximum de  $A$ , la borne inférieure de  $A$ , le minimum de  $A$ .

- $A$  est non vide (il contient 1 ), est majoré par 1 et minoré par 0. Donc par le théorème de la borne supérieure, il admet une borne supérieure et une borne inférieure, à déterminer ultérieurement.
- $1 \in A$  (cas  $n = 1$ ) et 1 majore  $A$ , donc 1 est à la fois le maximum et la borne supérieure de  $A$ .

- Supposons que  $A$  admette un minimum  $\alpha$ . C'est un minorant de  $A$ , donc  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \alpha \leq \frac{1}{n}$ . Par passage à la limite, on trouve  $\alpha \leq 0$ . De plus,  $\alpha \in A$ , donc il existe un entier  $n_0$  tel que  $\alpha = \frac{1}{n_0} > 0$ . Absurde. Donc  $A$  n'admet pas de minimum.
- Soit  $\beta$  la borne inférieure de  $A$  (dont on a déjà montré l'existence). C'est un minorant de  $A$ , donc  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \beta \leq \frac{1}{n}$ . Par passage à la limite, on trouve  $\beta \leq 0$ . De plus 0 est minorant de  $A$  et  $\beta$  est le plus grand des minorants : on en déduit  $0 \leq \beta$ . Donc  $\beta = 0$  et 0 est la borne inférieure de  $A$ .

## 7.4.2 Propriétés des suites monotones

### Théorème 7.6 (Théorème de convergence monotone)

- Toute suite croissante et majorée est **convergente**. Plus précisément, si une suite  $(u_n)$  est croissante et majorée par un réel  $M$ , alors la suite  $(u_n)$  converge vers une limite  $\ell$  qui vérifie  $\ell \leq M$ .
- Toute suite décroissante et minorée est **convergente**. Plus précisément, si une suite  $(u_n)$  est décroissante et minorée par un réel  $m$ , alors la suite  $(u_n)$  converge vers une limite  $\ell$  qui vérifie  $\ell \geq m$ .



**Attention !** On n'a pas nécessairement  $\ell = M$  ! Ainsi, la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = 7 - \frac{1}{n}$  est croissante et majorée par  $M = 8$ , mais aussi par  $M' = 10$  et pourtant  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 7$ .



*Remarque :* Le Théorème de convergence monotone peut se réécrire comme suit:

- Toute suite croissante et majorée converge vers  $\ell$ , sa borne supérieure.
- Toute suite décroissante et minorée converge vers  $\ell$ , sa borne inférieure.

L'existence de la borne supérieure ou inférieure est assurée par le Théorème de la borne supérieure :  $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  est un ensemble de réels non vide, qui admet un majorant quand la suite est majorée, et un minorant quand elle est minorée.

**Exercice type 7.2** On considère la suite  $(S_n)$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

1. Montrer que la suite  $(S_n)$  est croissante.
2. Dans cette question, on va montrer que la suite  $(S_n)$  est majorée par 2.

(a) Montrer que pour tout  $k \geq 2$ ,  $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ .

(b) Montrer que  $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 - \frac{1}{n}$ .

(c) En déduire que  $(S_n)_n$  est majorée par 2.

3. Conclure.

**Correction:**

1. Calculons  $S_{n+1} - S_n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0.$$

Ainsi la suite  $(S_n)_n$  est croissante.

2.

(a) Montrons que  $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ , pour cela montrons que  $\frac{1}{k^2} - \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \leq 0$ .

On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2} - \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) &= \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k} = \frac{k(k-1) - k^2 \times k + k^2(k-1)}{k^2(k-1)k} \\ &= \frac{k^2 - k - k^3 + k^3 - k^2}{k^2(k-1)k} = \frac{-k}{k^2(k-1)k} < 0. \end{aligned}$$

On obtient donc l'inégalité voulue.

(b) Sommons cette inégalité pour  $k$  variant de 2 à  $n$ , on obtient :

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right).$$

La somme de droite est une somme télescopique et vaut :

$$\sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n}.$$

On obtient bien l'inégalité voulue.

(c) On a, d'après la question précédente :

$$S_n = \frac{1}{1^2} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + 1 - \frac{1}{n}.$$

Or  $-\frac{1}{n} < 0$ , ainsi

$$S_n \leq 2.$$

3. La suite  $(S_n)$  étant croissante et majorée par 2, d'après le théorème de convergence monotone, elle est convergente vers une limite  $\ell$  qui vérifie  $\ell \leq 2$ .

On ne peut rien dire de plus sur la limite  $\ell$ .



*Remarque* : On peut démontrer (mais nous l'admettrons) que la suite  $(S_n)$  converge vers  $\frac{\pi^2}{6} \simeq 1,6449340668$ .



*En Python* : Écrire un programme qui calcule une valeur approchée de  $S_{10000}$ .

On peut constater que le programme renvoie  $S_{10000} \simeq 1,6448340718$ . Les trois premières décimales coïncident donc avec celles de la limite.

- Proposition 7.12**
- Toute suite croissante et non majorée diverge vers  $+\infty$ .
  - Toute suite décroissante et non minorée diverge vers  $-\infty$ .

## 7.5 Suites adjacentes

**Définition 7.13** Deux suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont dites **adjacentes** si elles vérifient les 3 conditions suivantes:

- $(u_n)$  est croissante
- $(v_n)$  est décroissante
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$ .

**Théorème 7.7** Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites adjacentes. Alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont convergentes et de plus:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$

*Démonstration.* **A comprendre**

Commençons par montrer que nécessairement pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq v_n$ . Pour cela, raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $u_{n_0} > v_{n_0}$ . Comme la suite  $(u_n)_n$  est croissante et que la suite  $(v_n)_n$  est décroissante, on a pour tout  $n \geq n_0$ :

$$0 < u_{n_0} - v_{n_0} \leq u_n - v_n.$$

En passant à la limite dans cette inégalité, on obtient :

$$0 < u_{n_0} - v_{n_0} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n.$$

Ainsi  $0 < u_{n_0} - v_{n_0} \leq 0$ . Absurde.

On a donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq v_n$ . La suite  $(u_n)_n$  étant croissante et la suite  $(v_n)_n$  étant décroissante, on peut écrire que :

$$u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0.$$

Ainsi la suite  $(u_n)_n$  est croissante et majorée par  $v_0$  donc d'après le Théorème de convergence monotone, la suite  $(u_n)_n$  converge vers un réel  $l_1$ . De plus, la suite  $(v_n)_n$  est décroissante et minorée par  $u_0$  donc d'après le Théorème de convergence monotone, la suite  $(v_n)_n$  converge vers un réel  $l_2$ . Il nous reste alors à montrer que  $l_1 = l_2$ . On a :

$$l_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \text{ et } l_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = l_1 - l_2.$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$  donc par unicité de la limite  $l_1 = l_2$ . □

**Exercice type 7.3** Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies respectivement par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

Montrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes. Conclure.

**Correction :**

Nous devons montrer que l'une des suites est croissante et que l'autre décroissante. Calculons les quatre premiers termes de ces suites pour savoir laquelle semble croissante et laquelle semble décroissante. On rappelle que par convention  $0! = 1$ , on a :

$$u_0 = \sum_{k=0}^0 \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} = 1, \quad u_1 = \sum_{k=0}^1 \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} = 2, \quad u_2 = \sum_{k=0}^2 \frac{1}{k!} = 2 + \frac{1}{2!} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2},$$

$$u_3 = \sum_{k=0}^3 \frac{1}{k!} = \frac{5}{2} + \frac{1}{3!} = \frac{5}{2} + \frac{1}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}.$$

$$v_0 = u_0 + \frac{1}{0!} = 2, \quad v_1 = u_1 + \frac{1}{1!} = 1 + 1 = 2, \quad v_2 = u_2 + \frac{1}{2!} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2,$$

$$v_3 = u_3 + \frac{1}{3!} = \frac{5}{3} + \frac{1}{3!} = \frac{10}{6} + \frac{1}{6} = \frac{11}{6}.$$

La suite  $(u_n)$  semble donc croissante et la suite  $(v_n)$  semble décroissante. Nous avons pour  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0.$$

Ainsi la suite  $(u_n)_n$  est bien croissante. On a également pour  $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} - \left( u_n + \frac{1}{n!} \right) \\ &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} \\ &= \frac{2}{(n+1)!} + \frac{1}{n!} \\ &= \frac{2 - (n+1)}{(n+1)!} \\ &= -\frac{n-1}{(n+1)!} < 0. \end{aligned}$$

Ainsi la suite  $(v_n)_n$  est bien décroissante. On a également pour  $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$v_n - u_n = \frac{1}{n!}.$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} = 0$ . Ainsi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$ .

Les suites  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$  sont bien adjacentes. Ainsi elles sont convergentes et elles convergent vers la même limite  $\ell$ .



Remarque : On peut démontrer (et nous l'admettrons provisoirement) que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent vers  $e \simeq 2.718281828459045$ .



En Python : Écrire un programme qui calcule une valeur approchée de  $u_{10}$ .

On peut constater que le programme renvoie  $u_{10} \simeq 2.7182818$ . Il suffit de calculer  $u_{10}$  pour avoir les 7 premières décimales de  $e$ . Cette suite converge bien plus « vite » que celle de l'Exercice-type 7.2.