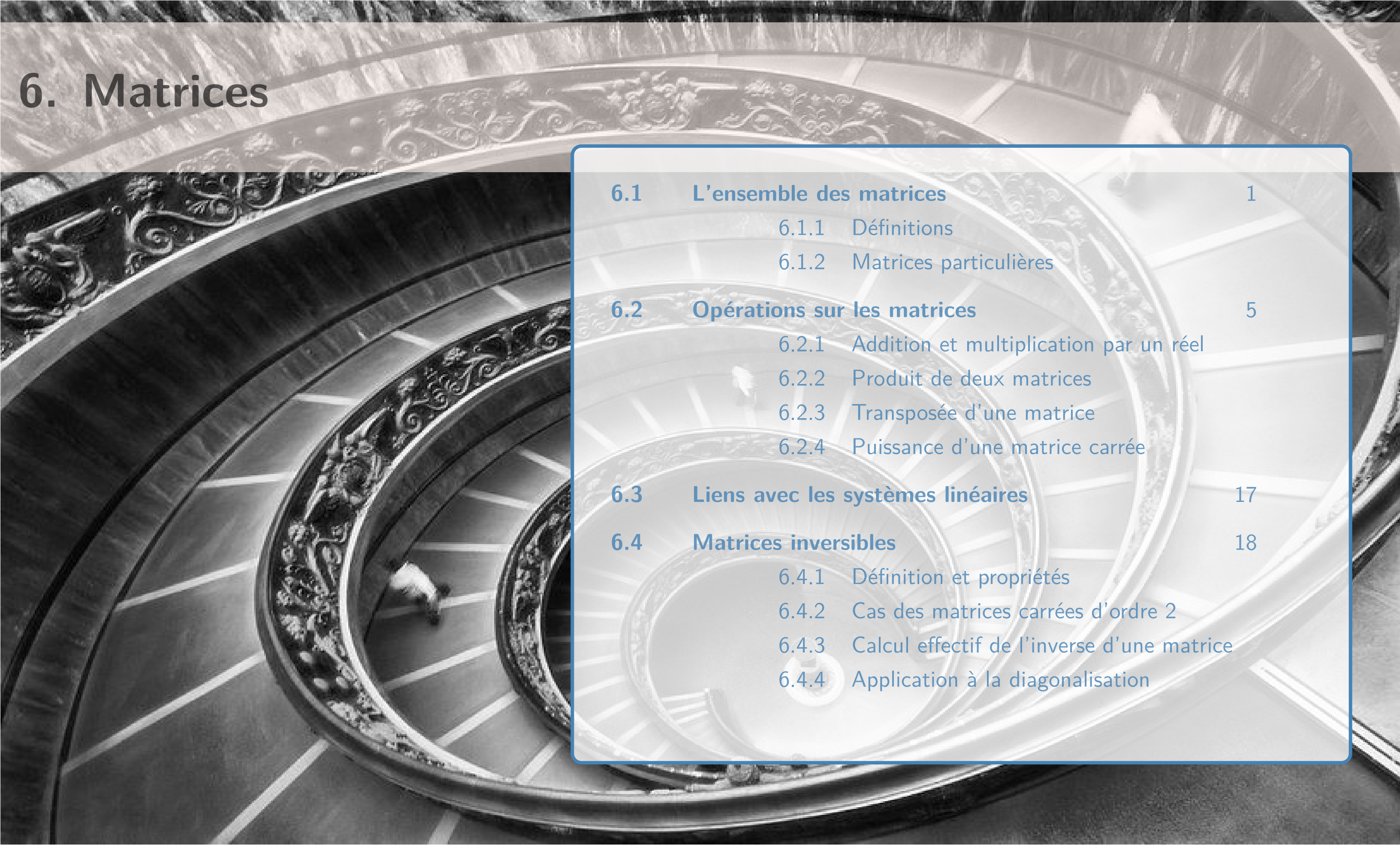


6. Matrices

C'est avec la logique que nous prouvons
et avec l'intuition que nous trouvons.

Henri Poincaré

Dans ce chapitre est introduit un nouvel objet mathématique : les matrices. Nous allons notamment définir les opérations sur les matrices, étudier quelques matrices particulières. Nous évoquerons le lien étroit entre matrices et systèmes linéaires. Cela nous fournira une méthode pour, lorsque c'est possible, calculer l' inverse d'une matrice carrée.

6.1 L'ensemble des matrices

6.1.1 Définitions

Définition 6.1 Soient n et p dans $\mathbb{N}^*$. On appelle **matrice** à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$ tout tableau de la forme:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

où les $a_{i,j}$ désignent des réels pour $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$: ce sont les **coefficients** de la matrice A.

Notations : Si A désigne une matrice à n lignes et p colonnes, on peut écrire de manière plus compacte:

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} \qquad ou \qquad A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}.$$

Attention ! Le premier indice i désigne le numéro de la ligne et le second indice j désigne le numéro de la colonne.

Exemple 6.1 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ une matrice, on a :

$a_{1,1} = 1,\quad a_{1,2} = 2,\quad a_{1,3} = 3,\quad a_{2,1} = 4,\quad a_{2,2} = 5,\quad a_{2,3} = 6,\quad a_{3,1} = 7,\quad a_{3,2} = 8,\quad a_{3,3} = 9.$

*Remarque : Deux matrices sont **égales** si et seulement si elles ont les mêmes dimensions et les mêmes coefficients:*

$$(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m \\ 1\leqslant j\leqslant q}} \Longleftrightarrow \begin{cases} n = m \\ p = q \\ \forall i \in [\![1,n]\!] \quad \forall j \in [\![1,p]\!] \qquad a_{i,j} = b_{i,j}. \end{cases}$$

Exemple 6.2 On donne : $E = \begin{pmatrix} 2x+3 & 5 \\ 3 & -2y-4 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.
Déterminons x et y pour que les deux matrices E et F soient égales.
On a :

$$\begin{aligned} E = F &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2x+3 & 5 \\ 3 & -2y-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x+3 &= -1 \\ -2y-4 &= 5 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x &= -4 \\ -2y &= 9 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} x &= -2 \\ y &= -\dfrac{9}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Définition 6.2
- Une matrice qui possède le même nombre de lignes et de colonnes est appelée une **matrice carrée**.
- Une matrice qui n'a qu'une seule colonne est appelée une **matrice colonne**.
- Une matrice qui n'a qu'une seule ligne est appelée une **matrice ligne**.

Notations :

- *L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes se note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.*
- *L'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes se note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ au lieu de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.*

Exemple 6.3

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\\5 & 6\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}) \qquad \begin{pmatrix}\ln(2) & 6 & -5\\8 & e & 3\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \qquad \begin{pmatrix}-11 & 2 & 7 & 5\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix}-2\\9\\4\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \qquad \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2}(\mathbb{R}) \qquad \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3}(\mathbb{R}) \qquad \begin{pmatrix}27\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1}(\mathbb{R})$$

Définition 6.3

- On appelle **matrice nulle** à n lignes et p colonnes et on note $0_{n,p}$ la matrice à n lignes et p colonnes dont tous les coefficients sont nuls.
  Lorsque $n = p$, on écrira simplement 0_n au lieu de $0_{n,n}$.
- On appelle **matrice identité** d'ordre n et on note I_n la matrice carrée dont les coefficients de la diagonale sont égaux à 1 et tous les autres sont égaux à 0. Autrement dit :

$$I_n = \begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\0 & 1 & \ddots & \vdots\\\vdots & \ddots & \ddots & 0\\0 & \dots & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Exemple 6.4 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} = I_3, \qquad \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} = 0_2.$

Exercice 6.1 Écrire les matrice suivantes:

$$A = (i+j)_{\substack{1\leqslant i\leqslant 2\\1\leqslant j\leqslant 3}} \qquad B = (ij)_{\substack{1\leqslant i\leqslant 5\\1\leqslant j\leqslant 4}} \qquad C = ((-1)^{i+j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\1\leqslant j\leqslant 3}} \qquad D = (5i)_{\substack{1\leqslant i\leqslant 4\\1\leqslant j\leqslant 2}}$$

$$A = \begin{pmatrix}1+1 & 1+2 & 1+3\\2+1 & 2+2 & 2+3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\3 & 4 & 5\end{pmatrix}.$$

$$B = \begin{pmatrix}1\times1 & 1\times2 & 1\times3 & 1\times4\\2\times1 & 2\times2 & 2\times3 & 2\times4\\3\times1 & 3\times2 & 3\times3 & 3\times4\\4\times1 & 4\times2 & 4\times3 & 4\times4\\5\times1 & 5\times2 & 5\times3 & 5\times4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\2 & 4 & 6 & 8\\3 & 6 & 9 & 12\\4 & 8 & 12 & 16\\5 & 10 & 15 & 20\end{pmatrix}.$$

$$C = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} & (-1)^{1+2} & (-1)^{1+3} \\ (-1)^{2+1} & (-1)^{2+2} & (-1)^{2+3} \\ (-1)^{3+1} & (-1)^{3+2} & (-1)^{3+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$D = \begin{pmatrix} 5\times 1 & 5\times 1 \\ 5\times 2 & 5\times 2 \\ 5\times 3 & 5\times 3 \\ 5\times 4 & 5\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 10 & 10 \\ 15 & 15 \\ 20 & 20 \end{pmatrix}.$$

6.1.2 Matrices particulières

Matrices triangulaires

Définition 6.4 On appelle **matrice triangulaire supérieure** toute matrice carrée de la forme:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

On définit de même les matrices triangulaires inférieures.

Exemple 6.5 la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure.

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & \sqrt{2} & 0 \\ -5 & \frac{1}{2} & \pi \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure.

Matrices diagonales

Définition 6.5 On appelle **matrice diagonale** toute matrice carrée de la forme:

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

où d_1, d_2, ..., d_n sont des réels quelconques. Une telle matrice est parfois notée:

$$\mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$$

Remarque : Les matrices diagonales sont donc les matrices qui sont à la fois triangulaires inférieures et supérieures.

Exemple 6.6

- Les matrices I_n et 0_n sont des exemples de matrices diagonales.
- La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale.

6.2 Opérations sur les matrices

6.2.1 Addition et multiplication par un réel

Multiplication d'une matrice par un réel

Définition 6.6 Pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et pour tout réel λ, on pose:

$$\lambda A = \lambda (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$$

Autrement dit, pour multiplier une matrice par un réel, on multiplie tous les coefficients de la matrice par ce réel.

Exemple 6.7

$$5\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \\ 25 & 30 \end{pmatrix}$$

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$. Alors :

$$4A = 4\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Proposition 6.1

- Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et pour tous réels λ et μ, on a : $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.
- Pour tout λ dans $\mathbb{R}$, on a : $\lambda 0_{n,p} = 0_{n,p}$.
- Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on a : $0A = 0_{n,p}$.

Définition 6.7 Pour toute matrice A, la matrice $(-1)A$ est notée $-A$ et s'appelle la **matrice opposée** de la matrice A.
L'opposée $-A$ d'une matrice A s'obtient donc en remplaçant chaque coefficient de A par son opposé.

Exemple 6.8

$$-\begin{pmatrix} 2 & 6 & -5 \\ -8 & -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 5 \\ 8 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Addition de deux matrices

Définition 6.8 Pour toutes matrices de même taille $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$, on pose:

$$A + B = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} + (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$$

Attention ! L'addition de deux matrices n'est possible que si elles ont le même nombre de lignes et de colonnes !

Exemple 6.9

$$\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 5 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 6 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Remarque : Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on a l'égalité:

$$A + (-A) = 0_{n,p}$$

ce qui justifie a posteriori la terminologie employée pour la matrice $-A$.

Puisqu'on sait additionner deux matrices et multiplier une matrice par un scalaire, on est capable de faire des *combinaisons linéaires* de matrices.

Exemple 6.10 Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & 8 & -9 \end{pmatrix}$, combien vaut $A - 3I_3$?

$A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ -7 & 8 & -12 \end{pmatrix}$

Proposition 6.2

- Pour toutes matrices A et B dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on a:

$$A + B = B + A$$

On dit que l'addition dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est **commutative**.

- Pour toutes matrices A, B et C dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on a:

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

On dit que l'addition dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est **associative**.

- Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on a:

$$A + 0_{n,p} = 0_{n,p} + A = A$$

<u>Remarque</u> :

- *La deuxième propriété nous permet de ne pas mettre de parenthèse dans une expression telle que $A+B+C$ puisqu'elle affirme que le résultat ne dépend pas de la position des parenthèses.*
- *La troisième propriété traduit le fait que les matrices $0_{n,p}$ jouent dans le calcul matriciel le même rôle que le nombre 0 dans le calcul algébrique dans $\mathbb{R}$. On dit que $0_{n,p}$ est l'**élément neutre** pour l'addition dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.*

Proposition 6.3

- Pour toutes matrices A et B dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et pour tout réel λ, on a:

$$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B.$$

- Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et pour tous réels λ et μ, on a:

$$(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A.$$

Exercice 6.2 Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.
Soit X une matrice de taille 2×2 telle que $2X+3A = B$. Déterminer la matrice X.

On a :

$$2X+3A = B \iff 2X = B-3A \iff X = \frac{1}{2}(B-3A).$$

Ainsi $X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6.3 Pour une matrice $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit la trace de A par:

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Soient $B = (b_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, calculer en fonction de A, B ou λ les expressions suivantes:

- $\mathrm{Tr}(A+B) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + b_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$, par linéarité de la somme.
- $\mathrm{Tr}(\lambda A) \quad = \sum_{i=1}^{n} a\lambda a_{i,i} = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = \lambda \mathrm{Tr}(A)$ par linéarité de la somme.

6.2.2 Produit de deux matrices

Définition 6.9 (Produit d'une matrice par une matrice colonne) Soient une matrice quelconque $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et une matrice colonne $B = (b_{i,1})_{1 \leqslant i \leqslant p} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. On appelle **produit** de la matrice A par la matrice B, la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ notée $A \times B$ ou AB, définie par :

$$AB = (c_{i,1})_{1 \leqslant i \leqslant n} \qquad \text{où } c_{i,1} = a_{i,1}b_{1,1} + a_{i,2}b_{2,1} + \cdots + a_{i,p}bp,1 = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,1}.$$

Autrement dit,

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \\ \vdots \\ b_{p,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} + \cdots + a_{1,p}b_{p,1} \\ a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} + \cdots + a_{2,p}b_{p,1} \\ \vdots \\ a_{n,1}b_{1,1} + a_{n,2}b_{2,1} + \cdots + a_{n,p}b_{p,1} \end{pmatrix}$$

Exemple 6.11 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Alors :

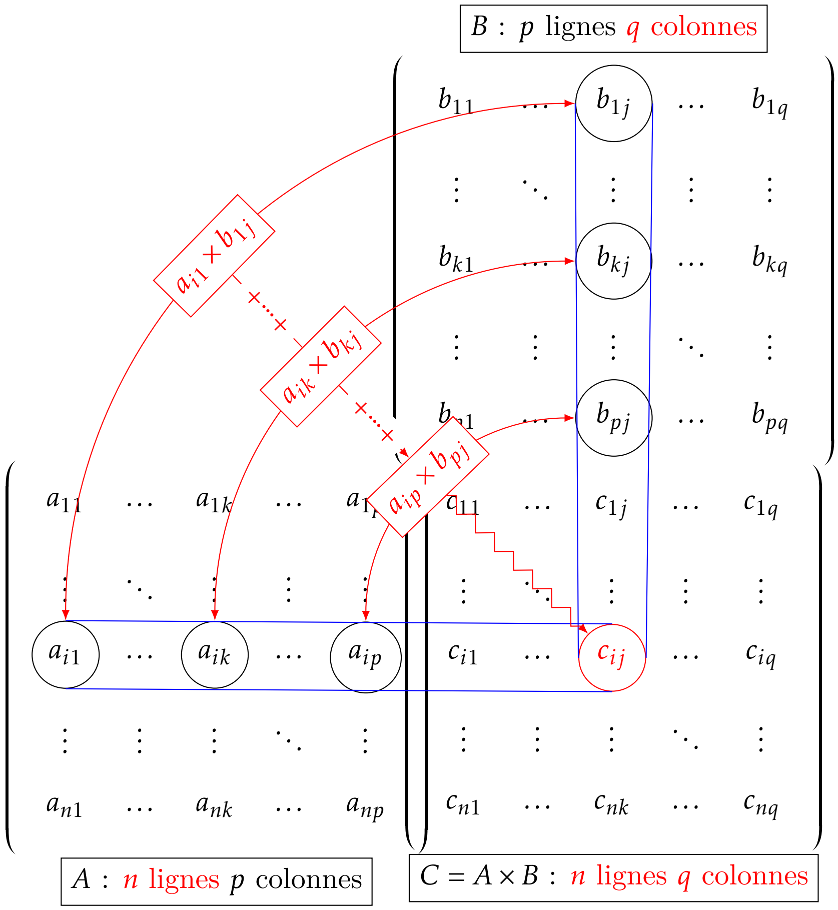
$AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ -11 \end{pmatrix}$.

Définition 6.10 (Produit de deux matrices, cas général) Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ deux matrices. On appelle **produit** de la matrice A par la matrice B, la matrice de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ notée $A \times B$ ou AB définie par :

$$AB = (c_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant q}} \qquad \text{où } c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \cdots + a_{i,p}b_{p,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}$$

Attention ! Pour pouvoir effectuer le produit AB, le nombre de colonnes de A doit être égal au nombre de lignes de B, sinon le produit n'est pas défini !

Illustration du produit matriciel :



Exemple 6.12 Calculer les produits matriciels suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 16 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 30 & 6 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 4 & 12 & 20 \\ 6 & 18 & 30 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 4 & 1 & -6 \\ 9 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 3y + 7z \\ 4x + y - 6z \\ 9x + 5z \end{pmatrix}$$

Attention ! En général, le produit AB (s'il existe) n'est pas égal au produit BA (s'il existe): le produit matriciel n'est pas commutatif !

Exemple 6.13 Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$. On a :

$$AB = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad BA = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}.$$

On a bien $AB \neq BA$.

Attention ! Un produit de deux matrices peut être égal à la matrice nulle sans qu'aucune de ces deux matrices ne soit égale à la matrice nulle !

Exemple 6.14 Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule AB et on obtient $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2$. Pourtant $A \neq 0_2$ et $B \neq 0_2$.

Proposition 6.4

- Pour toutes matrices $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$:

$$(AB)C = A(BC).$$

  Ainsi, le produit matriciel est **associatif**: le résultat commun se note ABC.

- Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$:

$$AI_p = A \quad \text{et} \quad I_n A = A.$$

  On dit que la matrice identité I_n est l'**élément neutre** pour la multiplication dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Pour toutes matrices $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et pour tout réel λ:

$$(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B).$$

- Pour toutes matrices $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$:

$$A(B+C) = AB + AC.$$

- Pour toutes matrices $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$:

$$(A+B)C = AC + BC.$$

Remarque : On pourra retenir que les règles de calcul sont les mêmes qu'avec les réels ***si ce n'est que*** *la commutativité n'est en général pas vraie pour les matrices.*

Exercice 6.4 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. A quelle condition peut-on considérer le produit de A par elle-même ?
Lorsqu'on effectue le produit d'une matrice M_1 par une matrice M_2, il faut que le nombre de colonnes de M_1 soit égal au nombre de lignes de M_2. Ainsi pour considérer le produit de A par elle-même, il faut que $n = p$.

6.2.3 Transposée d'une matrice

Définition 6.11 Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle **transposée** de A et on note ${}^tA$ la matrice définie par :

$$ {}^tA = (a_{j,i})_{\substack{1\leqslant j\leqslant p\\ 1\leqslant i\leqslant n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}) $$

Autrement dit, la matrice ${}^tA$ est obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de la matrice A.

Exemple 6.15

- Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice

$$ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & -5 & 7 \end{pmatrix} $$

alors la transposée de A est :

$$ {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & -5 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}). $$

Les colonnes de A sont les lignes de ${}^tA$.

- Soit $B \in \mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$ la matrice :

$$ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} $$

alors la transposée de B est :

$$ {}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,2}(\mathbb{R}). $$

Exercice 6.5 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, que peut-on dire de $\mathrm{Tr}({}^tA)$?
La diagonale d'une matrice carrée reste inchangée par opération de transposition ainsi $\mathrm{Tr}({}^tA) = \mathrm{Tr}(A)$.

Proposition 6.5

- Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\;{}^t\left({}^tA\right) = A$.
- Pour tout réel λ et pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\;{}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$.
- Pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\;{}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$.
- Pour toutes matrices $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, $\;{}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

Matrices symétriques

Définition 6.12 Une matrice carrée A est dite **symétrique** si et seulement si elle est égale à sa transposée i.e. ${}^tA = A$.

<u>Notations</u> : On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques.

Exemple 6.16 La matrice $A = \begin{pmatrix} -9 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & 1 \\ -5 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique: ${}^tA = A$.

Exercice 6.6 Soient A et B deux matrices carrées de même dimension.

1. Montrer que la somme de deux matrices symétriques est une matrice symétrique.
2. Le produit de deux matrices symétriques est-il toujours une matrice symétrique ? Donner une condition nécessaire et suffisante pour que cela soit le cas.

1. Soient A et B deux matrices symétriques, calculons ${}^t(A+B)$.

$$ {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB = A + B \qquad \text{car les deux matrices sont symétriques.} $$

2. Soient A et B deux matrices symétriques, calculons ${}^t(AB)$.

$$ {}^t(AB) = {}^tB{}^tA = BA \qquad \text{car les deux matrices sont symétriques.} $$

AB est une matrice symétrique si et seulement si ${}^t(AB) = AB$, or d'après le calcul précédent ${}^t(AB) = BA$. Ainsi la matrice AB est symétrique si et seulement si $AB = BA$ *i.e.* si les matrices A et B commutent.

Matrices antisymétriques

Définition 6.13 Une matrice carrée A est dite **antisymétrique** si et seulement si elle est égale à l'opposé de sa transposée i.e. ${}^tA = -A$.

Notations : On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

Exemple 6.17 La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -\mathrm{e} \\ -2 & 0 & 1 \\ \mathrm{e} & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice antisymétrique: ${}^tA = -A$.

Remarque : Les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont forcément nuls. En effet, les coefficients diagonaux restant inchangés par l'opération de transposition, les coefficients diagonaux de ${}^tA$ sont égaux à ceux de A, qui sont égaux à ceux de $-A$ ssi ils sont tous nuls.

6.2.4 Puissance d'une matrice carrée

Introduction sur un exemple

Reprenons l'énoncé de l'Exercice 10 du TD n°2.
Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont définies par les relations de récurrence suivantes:

$$\begin{cases} u_0 = 1, \qquad v_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 3u_n + 2v_n, \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = u_n + 2v_n. \end{cases}$$

On souhaite déterminer les expressions de u_n et de v_n en fonction de n.
Pour cela, dans le Chapitre 2, nous avions montré que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiait une relation de récurrence linéaire d'ordre 2. Puis, nous en avions déduit l'expression u_n en fonction de n puis celle v_n en fonction de n.
Voyons comment on peut trouver ces expressions en utilisant les matrices.

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, on a alors $U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$. Le système peut donc se mettre sous la forme :

$$U_{n+1} = AU_n \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On peut montrer par récurrence que $U_n = A^n U_0$ avec $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$.
Pour déterminer les expressions de u_n et v_n, il nous "suffit" alors de calculer A^n et d'effectuer le produit matriciel $A^n \times U_0$.

Définition et premiers exemples

Définition 6.14 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. On pose:

$$A^0 = I_n$$

et pour tout k dans $\mathbb{N}^*$:

$$A^k = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}}$$

INTERDIT ! Le calcul de A^2, par exemple, ne consiste **pas** à élever les éléments de A au carré!

Exemple 6.18 Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Alors :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}.$$

Proposition 6.6

- Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tous entiers r et s dans $\mathbb{N}$:

$$A^r A^s = A^{r+s}.$$

- Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tous entiers r et s dans $\mathbb{N}$:

$$(A^r)^s = A^{rs}.$$

Attention ! Les autres règles usuelles sur les puissances dans $\mathbb{R}$ ne sont **pas** vraies dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par exemple, $(AB)^2 \neq A^2B^2$.

Exercice 6.7 On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer $(AB)^2$ et A^2B^2. Conclure. Les matrices AB et BA sont-elles égales? On a :

$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Donc, $(AB)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Par ailleurs, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Donc, $A^2B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

On a donc $(AB)^2 \neq A^2B^2$.
Par l'absurde, supposons que $AB = BA$. Alors, $(AB)^2 = ABAB = AABB = A^2B^2$. Absurde.
Donc, $AB \neq BA$.

Exemple 6.19 Calculer la puissance n-ème de la matrice suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculons tout d'abord B^2 et B^3 et essayons de conjecturer une formule pour B^n.
On a $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2$. Donc, $B^3 = B^2B = 0_2 \times B = 0_2$. Ainsi, pour tout $n \geqslant 2$,

$$B^n = B^2B^{n-2} = 0_2B^{n-2} = 0_2.$$

Exercice type 6.1 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calculer la puissance n-ème de A.

Calculons d'abord A^2, A^3 et A^4 pour conjecturer l'expression de A^n. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On conjecture que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrons cette formule par récurrence sur n.

On note $\mathcal{P}(n)$ la propriété « $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ».

Initialisation : $A^0 = I_2$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$. Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a :

$$A^{n+1} = A \times A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{par hypothèse de récurrence.}$$

On effectue le produit matriciel et on obtient $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Cas d'une matrice diagonale

Proposition 6.7 Soit $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}$ une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors, pour tout k dans $\mathbb{N}$, on a :

$$D^k = \begin{pmatrix} (d_1)^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (d_2)^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & (d_n)^k \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Démontrons ce résultat dans le cas d'une matrice de taille 3. On procède par récurrence sur n.

Notons $\mathcal{P}(n)$ la proposition: « $\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} d_1^n & 0 & 0 \\ 0 & d_2^n & 0 \\ 0 & 0 & d_3^n \end{pmatrix}$ ».

Initialisation : Par définition,

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}^0 = I_3 = \begin{pmatrix} d_1^0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2^0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3^0 \end{pmatrix}$$

donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a :

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$$

par hypothèse de récurrence, on sait que

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} d_1^n & 0 & 0 \\ 0 & d_2^n & 0 \\ 0 & 0 & d_3^n \end{pmatrix}$$

Donc,

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} d_1^n & 0 & 0 \\ 0 & d_2^n & 0 \\ 0 & 0 & d_3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & d_2^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & d_3^{n+1} \end{pmatrix}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$, à savoir:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} d_1^n & 0 & 0 \\ 0 & d_2^n & 0 \\ 0 & 0 & d_3^n \end{pmatrix}.$$

□

Exemple 6.20

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}.$$

6.3 Liens avec les systèmes linéaires

Proposition 6.8 On considère les matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,p} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Alors:

$$AX = B \iff \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & = & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array} \right.$$

Définition 6.15 Étant donné un système linéaire $(\mathcal{S})$:

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & = & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array} \right.$$

la matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ s'appelle la **matrice associée** au système (S).

Exemple 6.21

- Considérons le système linéaire :

$$(\mathcal{S}) \left\{ \begin{array}{ccc} 2x & + & y = 1 \\ x & - & y = -4 \end{array} \right.$$

Posons $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$. Alors, le système $(\mathcal{S})$ peut se réécrire sous la forme $AX = B$.

- Considérons le système linéaire (échelonné) :

$$(\mathcal{S}) \left\{ \begin{array}{ccccccc} 3x & + & y & + & z & + & 2t = 1 \\ & & y & - & 2z & + & t = 3 \\ & & & & 4z & - & t = 2 \\ & & & & & & 2t = -4 \end{array} \right.$$

Posons $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$. Alors, le système $(\mathcal{S})$ peut se réécrire sous la forme $AX = B$. On remarque que la matrice A associée au système $(\mathcal{S})$ est triangulaire.

Exercice 6.8 Donner la matrice associée au système linéaire suivant:

$$(\mathcal{S}) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 2z & = & 2 \\ 3x & + & 2y & - & z & = & 5 \\ 2x & - & 5y & + & 3z & = & -4 \\ x & + & 4y & + & 6z & = & 0 \end{array} \right.$$

La matrice associée au système $(\mathcal{S})$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

6.4 Matrices inversibles

6.4.1 Définition et propriétés

Définition 6.16 Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **inversible** s'il existe une matrice carrée $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que:

$$AB = I_n \quad \text{et} \quad BA = I_n$$

Si B existe, alors B est unique et on l'appelle la **matrice inverse** de A. On la note A^{-1}.

Remarque :

- *La notion de matrice inversible n'a de sens que pour les matrices carrées.*
- *Une matrice inversible admet un* **unique** *inverse.*

  Si on suppose qu'il existe deux matrices B_1 et B_2 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB_1 = B_1A = I_n$ et $AB_2 = B_2A = I_n$, alors en particulier $(B_1A)B_2 = I_nB_2$ donc $B_1(AB_2) = B_2$ donc $B_1I_n = B_2$ et donc $B_1 = B_2$.

Exemple 6.22 1. La matrice identité est inversible et $I_n^{-1} = I_n$ car :

$$I_nI_n = I_n \qquad \text{et} \quad I_nI_n = I_n$$

2. La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. En effet :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

3. La matrice carrée nulle O_n n'est pas inversible car :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \qquad O_n \times M = M \times O_n = O_n \neq I_n$$

4. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ n'est pas la matrice nulle mais elle n'est pas inversible pour autant.
Quelle que soit la matrice par laquelle on la multiplie à droite, la première ligne du résultat sera constitué de trois zéros et donc la matrice produit ne peut pas être égale à I_3.

Exercice 6.9 On considère les matrices suivantes:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que la matrice P est inversible et déterminer P^{-1}.

Calculons les produits matriciels PQ et QP. On obtient :

$$PQ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3$$

et

$$QP = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3.$$

Ainsi $P \times \frac{1}{2}Q = \frac{1}{2}Q \times P = I_3$ et donc la matrice P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{2}Q$.

Exercice 6.10 On considère la matrice Attila d'ordre 4:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que la matrice A n'est pas inversible.

Raisonnons par l'absurde et supposons que la matrice A est inversible. Il existe alors une matrice B telle que $BA = AB = I_4$. On note

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix}.$$

La première colonne de la matrice AB est alors

$$\begin{pmatrix} a+e+i+m \\ a+e+i+m \\ a+e+i+m \\ a+e+i+m \end{pmatrix}.$$

Comme par hypothèse $AB = I_4$, on devrait avoir $a+e+i+m = 1$ et $a+e+i+m = 0$. Absurde! Ainsi la matrice A n'est pas inversible.

Dans la pratique, on utilisera souvent le théorème admis suivant pour montrer qu'une matrice est inversible.

Théorème 6.1 Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = I_n$, alors A et B sont inversibles et on a:

$$A^{-1} = B \quad \text{et} \quad B^{-1} = A.$$

Exemple 6.23 Considérons les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

Alors:

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Ce qui prouve que A et B sont inversibles et qu'elles sont inverses l'une de l'autre.

Avant de passer aux propriétés de l'inversion de matrices, remarquons que le cas des matrices diagonales est facile:

Proposition 6.9 Une matrice diagonale (d'ordre n), $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux d_i sont tous non nuls. Dans ce cas:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{d_n} \end{pmatrix}.$$

Exemple 6.24

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Proposition 6.10 Soient A, B et C dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Si A est inversible, alors A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. Si A et B sont inversibles, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3. Si A est inversible alors ${}^tA$ est inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.
4. Si A est inversible, alors A est simplifiable à gauche et à droite, *i.e.* :

$$AB = AC \implies B = C$$
$$BA = CA \implies B = C$$

Démonstration.

1. Si A est inversible d'inverse A^{-1} alors par définition: $AA^{-1} = I_n$ et $A^{-1}A = I_n$. Ce qui veut également dire que la matrice A^{-1} est inversible d'inverse A.
2. On a $AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$ donc d'après le Théorème 6.1, la matrice AB est inversible d'inverse $B^{-1}A^{-1}$.
3. On a ${}^tA \times {}^t(A^{-1}) = {}^t(A^{-1}A) = {}^tI_n = I_n$ alors ${}^tA$ est inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.
4. On a : $AB = AC \implies A^{-1}AB = A^{-1}AC \implies I_nB = I_nC \implies B = C$. De même pour la dernière implication en multipliant à droite par A^{-1}.

□

Attention ! La somme de deux matrices inversibles n'est pas inversible en général. Par exemple, pour $n \in \mathbb{N}^*$, I_n et $-I_n$ sont inversibles mais $I_n - I_n = 0_n$ ne l'est pas.

6.4.2 Cas des matrices carrées d'ordre 2

Proposition 6.11 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. Dans ce cas:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Démonstration. Montrons cette équivalence par double implication.
($\Leftarrow$) Supposons que $ad - bc \neq 0$ et montrons que la matrice A est inversible. On a :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = I_2$$

ce qui prouve que A est inversible et que $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

($\Rightarrow$) Supposons que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible et montrons alors que $ad - bc \neq 0$.

Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que $ad - bc = 0$. Posons $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, on a alors :

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = (ad-bc)I_2 = 0_2.$$

Ainsi $AB = 0_2$, or la matrice A est inversible donc il existe une matrice inverse A^{-1} telle que $A^{-1}A = I_2$. On a alors :

$$A^{-1} \times AB = A^{-1} \times 0_2 \iff B = 0_2.$$

Ainsi $a = b = c = d = 0$, ceci implique que $A = 0_2$. Or la matrice A est inversible donc non nulle. Absurde. On peut donc conclure que $ad - bc \neq 0$. □

Exercice 6.11 Les matrices suivantes sont-elles inversibles? Si oui, préciser leur inverse.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$.
2. $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

1. On commence par calculer $ad - bc$. On a $ad - bc = 2 \times 5 - 6 \times 2 = -2 \neq 0$. La matrice A est donc inversible. D'après ce qui précède son inverse est égal à :

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. On commence par calculer $ad - bc$. On a $ad - bc = 3 \times 4 - 6 \times 2 = 0$ donc la matrice B n'est pas inversible.

6.4.3 Calcul effectif de l'inverse d'une matrice

A l'aide d'un polynôme annulateur

Méthode 6.1 Dans certains cas sympathiques, la matrice dont on veut étudier l'inversibilité vérifie une relation faisant intervenir ses propres puissances et la matrice identité. Dans ce cas, on peut directement conclure quant à l'inversibilité de la matrice et on détermine son inverse à peu de frais.

Exercice type 6.2 On considère la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer $A^2 + A$. En déduire que la matrice A est inversible et déterminer son inverse.
On commence par calculer A^2. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Puis on calcule $A^2 + A$, on obtient :

$$A^2 + A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3.$$

Ainsi $A^2 + A = 2I_3$. De cette relation, on déduit que A est inversible et on détermine son inverse. En effet

$$A^2 + A = 2I_3 \iff A(A + I_3) = 2I_3 \iff A \times \frac{1}{2}(A + I_3) = I_3.$$

D'après le Théorème 6.1, la matrice A est inversible d'inverse $\frac{1}{2}(A + I_3)$. Ainsi :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

En faisant le lien avec les systèmes de Cramer

Théorème 6.2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice A est inversible si et seulement si pour tout Y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le système linéaire $AX = Y$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est de Cramer, *i.e.* admet une unique solution.

Démonstration. Le sens ($\Rightarrow$) est facile: supposons la matrice A inversible. Alors on a les équivalences:

$$\begin{aligned}(S) &\iff AX = Y \\ &\iff A^{-1}(AX) = A^{-1}Y \\ &\iff (A^{-1}A)X = A^{-1}Y \\ &\iff X = A^{-1}Y\end{aligned}$$

La réciproque est un peu plus délicate à démontrer, nous l'admettrons. □

Ce théorème nous fournit une nouvelle méthode pour déterminer si une matrice est inversible et, le cas échéant, calculer son inverse.

Méthode 6.2 En utilisant la méthode du Pivot de Gauss, on résout le système $AX = Y$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ en fonction de $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ quelconque fixé, puis on regarde:

- Si le système admet une unique solution $X = BY$, alors A est inversible et $A^{-1} = B$.
- Sinon, la matrice A n'est pas inversible.

Exemple 6.25 Montrons que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 11 \\ -1 & 12 & -19 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminons son inverse.

Soit $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a les équivalences:

$$
\begin{aligned}
AX = Y &\iff \begin{pmatrix} 1 & -7 & 11 \\ -1 & 12 & -19 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 7y & + & 11z & = & a \\ -x & + & 12y & - & 19z & = & b \\ & - & 3y & + & 5z & = & c \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 7y & + & 11z & = & a \\ & & 5y & - & 8z & = & a + b \\ & - & 3y & + & 5z & = & c \end{array} \right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 7y & + & 11z & = & a \\ & & 15y & - & 24z & = & 3a + 3b \\ & - & 15y & + & 25z & = & 5c \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 3L_2 \\ L_3 \leftarrow 5L_3 \end{array} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 7y & + & 11z & = & a \\ & & 15y & - & 24z & = & 3a + 3b \\ & & & & z & = & 3a + 3b + 5c \end{array} \right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 7y & + & 11z & = & a \\ & & 15y & & & = & 75a + 75b + 120c \\ & & & & z & = & 3a + 3b + 5c \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 7y & + & 11z & = & a \\ & & y & & & = & 5a + 5b + 8c \\ & & & & z & = & 3a + 3b + 5c \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 3a + 2b + c \\ y & = & 5a + 5b + 8c \\ z & = & 3a + 3b + 5c \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

$$AX = Y \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 8 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Finalement, la matrice A est inversible et son inverse est donné par $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 8 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Proposition 6.12 Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux (pivots) sont non nuls.

Exemple 6.26 Soit la matrice $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&3\\0&0&1\end{pmatrix}$. Montrons que la matrice A est inversible et calculons son inverse.

D'après la proposition précédente, A est inversible car ses coefficients diagonaux sont non nuls. Soit $Y=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Pour tout $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a les équivalences:

$$Ax=Y \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & & & z & = & a\\ & & 2y & + & 3z & = & b\\ & & & & z & = & c\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} x & = & a-c\\ y & = & \dfrac{b-3c}{2}\\ z & = & c\end{array}\right.$$

On en déduit la matrice inverse:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Méthode de Gauss-Jordan

Rappelons les différentes opérations élémentaires sur les lignes d'un système ou d'une matrice (on suppose $i\neq j$):

- $L_i\leftrightarrow L_j$: échange de deux lignes.
- $L_i\leftarrow aL_i$ (avec $a\neq 0$): remplacement d'une ligne par son produit par un réel non nul a.
- $L_i\leftarrow L_i+bL_j$: remplacement d'une ligne par sa somme avec un multiple d'une autre ligne.

Théorème 6.3 Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice A est inversible si et seulement si une suite d'opérations élémentaires sur les lignes de A transforme la matrice A en une matrice B inversible.

Exercice 6.12 Montrer que la matrice $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&4&-1\\-2&-5&3\end{pmatrix}$ est inversible.

On a :

$$A\iff\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix}\quad L_2\leftarrow L_2-2L_1,\quad L_3\leftarrow L_3+2L_1$$

$$A\iff\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\quad L_2\leftrightarrow L_3.$$

La matrice A est alors équivalente à une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont non nuls. Elle est donc inversible.

Théorème 6.4 Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Si une suite d'opérations sur les lignes de A transforme la matrice A en la matrice identité I_n, alors la même suite d'opérations transforme la matrice identité I_n en la matrice A^{-1}.

Méthode 6.3 Pour transformer A en I_n, on commence par transformer la matrice A en une matrice triangulaire supérieure par la méthode du pivot de Gauss, ce qui permet déjà de savoir si A est inversible ou non. Le cas échéant, on transforme alors la matrice triangulaire obtenue en une matrice triangulaire avec des 1 sur la diagonale, et enfin on élimine les coefficients non diagonaux restants. C'est la **méthode de Gauss-Jordan**.

Exercice 6.13 On considère la matrice P :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que la matrice P est inversible et déterminer son inverse.
On utilise donc la méthode de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

La matrice obtenue est triangulaire supérieure avec tous ses pivots non nuls donc elle est inversible. D'après le théorème précédent, la matrice P est elle aussi inversible. Poursuivons la méthode :

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Donc, la matrice P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice type 6.3 On considère les matrices:

$$A=\begin{pmatrix}5&1&-1\\2&4&-2\\1&-1&3\end{pmatrix}\quad \text{et}\quad P=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

L'objectif de cet exercice est d'obtenir l'expression de A^n pour tout n dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
2. Calculer la matrice $D=P^{-1}AP$.
3. Exprimer A en fonction de D, P et P^{-1}.
4. Montrer par récurrence sur n que:

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad A^n=PD^nP^{-1}$$

5. En déduire l'expression de A^n pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Correction :

1. **Méthode 1:** En résolvant un système linéaire

Soit $Y=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Pour tout $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a:

$$PX=Y\iff\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & y&+&z&=&a\\ x& & &+&z&=&b\\ x&+&y& & &=&c\end{array}\right.\qquad L_1\leftrightarrow L_3$$

$$\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x&+&y& & &=&c\\ x& & &+&z&=&b\\ & &y&+&z&=&a\end{array}\right.\qquad L_2\leftarrow L_2-L_1$$

$$\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x&+&y& & &=&c\\ &-&y&+&z&=&b-c\\ & &y&+&z&=&a\end{array}\right.\qquad L_3\leftarrow L_3+L_2$$

$$PX=Y\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x&+&y& & &=&c\\ &-&y&+&z&=&b-c\\ & & & &2z&=&a+b-c\end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x&=&-\frac{a}{2}&+&\frac{b}{2}&+&\frac{c}{2}\\ y&=&\frac{a}{2}&-&\frac{b}{2}&+&\frac{c}{2}\\ z&=&\frac{a}{2}&+&\frac{b}{2}&-&\frac{c}{2}\end{array}\right.\qquad\iff\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

Finalement, la matrice P est inversible et son inverse est donné par

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Méthode 2: En utilisant la méthode de Gauss-Jordan
Appliquons la méthode de Gauss-Jordan pour montrer que la matrice P est inversible.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow -0.5 L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_3, \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Ainsi la matrice P est inversible et

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Calculons le produit $P^{-1}AP$. On obtient $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

3. En partant de l'égalité $D = P^{-1}AP$, on a :

   $D = P^{-1}AP \iff PDP^{-1} = (PP^{-1})A(PP^{-1}) \iff PDP^{-1} = I_n A I_n \iff PDP^{-1} = A.$

   Ainsi $A = PDP^{-1}$.

4. Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété « $A^n = PD^nP^{-1}$.»

   Initialisation $(n = 0)$. $A^0 = I_n$ par convention et $PD^0P^{-1} = PI_nP^{-1} = PP^{-1} = I_n$. Ainsi $A^0 = PD^0P^{-1}$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \times A^n \\ &= APD^nP^{-1}, \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= PDP^{-1}PD^nP^{-1}, \quad \text{car } A = PDP^{-1} \\ &= PDI_nD^nP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

   Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.

   Conclusion La propriété étant initialisée et héréditaire, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

5. On calcule facilement D^n. On a :

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{pmatrix}.$$

Il ne nous reste alors plus qu'à calculer le produit matriciel PD^nP^{-1} pour obtenir l'expression de A^n.

$$A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4^n+6^n & 6^n-4^n & 4^n-6^n \\ 6^n-2^n & 2^n+6^n & 2^n-6^n \\ 4^n-2^n & 2^n-4^n & 2^n+4^n \end{pmatrix}.$$

Définition 6.17 Une matrice carrée A est dite **diagonalisable** s'il existe une matrice inversible P telle que le produit $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale D. On dispose alors des égalités matricielles suivantes:

$$D = P^{-1}AP \quad \text{et} \quad A = PDP^{-1}$$

Exemple 6.27 Reprenons l'exemple en introduction (exercice 10 du TD 2). On pourra montrer avec des outils de deuxième année que :

$$A = PDP^{-1} \text{ avec } P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n = A^nU_0 = PD^nP^{-1}U_0.$$

On a alors l'expression de U_n et donc des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque : Toutes les matrices ne sont pas diagonalisables ! Lorsqu'une matrice A n'est pas diagonalisable, on a recours à d'autres techniques hors programme pour calculer A^n.