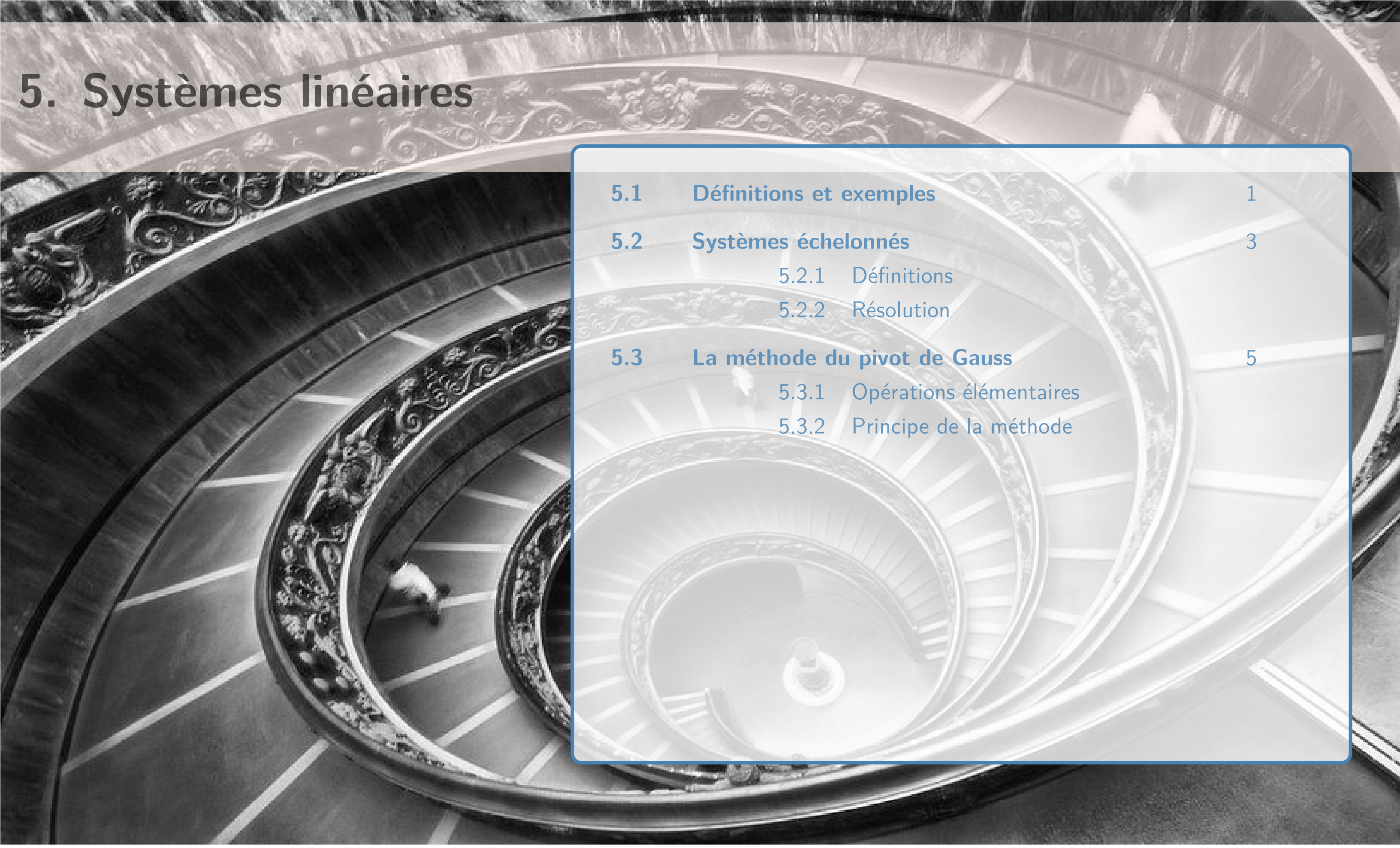

5. Systèmes linéaires

La mathématique est une science dangereuse : elle dévoile les supercheries et les erreurs de calcul.

Galilée

L'objectif de ce chapitre est d'introduire rigoureusement la notion de système linéaire, déjà vue au lycée. On y voit, entre autre, la méthode de résolution du pivot de Gauss.

5.1 Définitions et exemples

Définition 5.1 Soient n et p dans $\mathbb{N}^*$. On appelle **système linéaire** de n **équations** à p **inconnues** x_1, ..., x_p tout système (S) de la forme:

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & = & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

où $a_{i,j}$ et b_i désignent des réels supposés connus pour $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$.
Pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, la i-ème équation du système (S) est notée L_i et s'appelle la i-ème **ligne** du système (S).
On dit que $a_{i,j}$ est le **coefficient** de **l'inconnue** x_j dans la ligne L_i.
On dit que les réels b_i pour $i \in [\![1,n]\!]$ constituent le **second membre** du système.

Définition 5.2

- Une **solution** du système précédent est un ***p*-uplet** $(x_1, \dots, x_p)$ vérifiant *toutes* les n équations du système (S).
- **Résoudre** le système (S) précédent, c'est trouver l'ensemble des solutions de (S).
- Si pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, on a $b_i = 0$, on dit que le système (S) est **homogène**.

Exemple 5.1

- Le système suivant est un système de deux équations à deux inconnues:

$$\left\{\begin{array}{rcr} 2x+y &=& 1 \\ x-y &=& -4 \end{array}\right.$$

La résolution de ce système élémentaire donne $\mathscr{S} = \{(-1,3)\}$.

- Le système suivant est un système homogène de trois équations à trois inconnues:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+5z &=& 0 \\ x-3y+z &=& 0 \\ 3x-2y+6z &=& 0 \end{array}\right.$$

Notons que le triplet $(0,0,0)$ est solution, mais il y a peut-être d'autres triplets solutions ...

- Le système suivant est un système de trois équations à deux inconnues:

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+5y &=& -2 \\ 3x+y &=& 0 \\ -x+2y &=& 1 \end{array}\right.$$

<u>Remarque</u> : Il ne faut pas croire qu'un système linéaire admet toujours une unique solution ! En effet, certains systèmes linéaires admettent

- *soit aucune solution,*
- *soit une unique solution,*
- *soit une infinité de solutions.*

Notons qu'un système homogène à n inconnues admet soit une unique solution, soit une infinité de solutions puisque le n-uplet $(0,\dots,0)$ est toujours solution.

Définition 5.3 Deux systèmes linéaires (S) et (S') sont dits **équivalents** s'ils ont les mêmes solutions. On écrit:

$$(S) \iff (S')$$

Définition 5.4 Soit (S) un système linéaire de n équations à n inconnues. On dit que (S) est un système **de Cramer** s'il ne possède qu'un **unique** n-uplet solution.

5.2 Systèmes échelonnés

5.2.1 Définitions

Définition 5.5 Considérons un système linéaire quelconque:

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & = & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

Un tel système est dit **échelonné** si les coefficients $a_{i,j}$ vérifient les deux conditions suivantes:

- $\forall i \in [\![1,n]\!] \quad \forall j \in [\![1,p]\!] \qquad i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$
- si tous les coefficients situés à gauche d'un coefficient $a_{i,j}$ sont nuls, alors il en est de même des coefficients situés en dessous du coefficient $a_{i,j}$.

Sur chaque ligne, la première inconnue figurant avec un coefficient non nul est appelée une inconnue **principale** du système. Les inconnues non principales sont dites **secondaires**.
Si $n = p$, un système échelonné est dit **triangulaire** et les coefficients $a_{i,i}$ sont appelés les **pivots** du système.

Exemple 5.2

- Le système suivant est échelonné:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 & = & 1 \\ x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 & = & 5 \\ x_4 + 2x_5 & = & 7 \end{array}\right.$$

  Les variables principales sont x_1, x_2 et x_4.
  Les variables x_3 et x_5 sont les variables secondaires du système.

- Le système suivant est échelonné:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ x_2 + x_3 & = & 2 \\ x_3 & = & 3 \end{array}\right.$$

  Les variables principales sont x_1, x_2 et x_3.
  Il n'y a pas de variables secondaires.

- Le système suivant n'est pas échelonné:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 & = & 1 \\ 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 & = & 5 \\ 7x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 + 2x_5 & = & 7 \end{array}\right.$$

5.2.2 Résolution

La résolution des systèmes échelonnés est très simple: on exprime les inconnues principales en fonction des inconnues secondaires (s'il y en a), en partant de la dernière équation du système et en remontant.

Exemple 5.3 Résolvons le système échelonné suivant:

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & y & + & 2z & = & 4 \end{array}\right.$$

On commence par exprimer les inconnues principales en fonction des inconnues secondaires en partant de la dernière équation.

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rcr} x & = & 1-y-z \\ y & = & 4-2z \end{array}\right.$$

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rcr} x & = & 1-(4-2z)-z \\ y & = & 4-2z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcr} x & = & -3+z \\ y & = & 4-2z \end{array}\right.$$

Ainsi $\mathscr{S} = \{(-3+z, 4-2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

Exemple 5.4 Résolvons le système échelonné suivant:

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 2 \\ & & & & z & = & 3 \end{array}\right.$$

Ce système est triangulaire, il n'y a donc pas d'inconnue secondaire. Ce système possède alors une unique solution qu'on obtient en remontant les équations.

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rcr} x & = & 1-y-z \\ y & = & 2-z \\ z & = & 3 \end{array}\right.$$

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rcr} x & = & 1-y-3 \\ y & = & -1 \\ z & = & 3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcr} x & = & -1 \\ y & = & -1 \\ z & = & 3 \end{array}\right.$$

Ainsi $\mathscr{S} = \{(-1, -1, 3)\}$.

Nous avons vu dans cette partie comment résoudre des systèmes échelonnés, nous allons donc apprendre dans la partie suivante à échelonner des systèmes.

5.3 La méthode du pivot de Gauss

5.3.1 Opérations élémentaires

Définition 5.6 Les opérations suivantes sur les lignes d'un système linéaire (S) sont appelées **opérations élémentaires**.
(on suppose $i \neq j$)

- $L_i \leftrightarrow L_j$: échange de deux lignes.
- $L_i \leftarrow aL_i$ (avec $a \neq 0$): remplacement d'une ligne par son produit par un réel non nul a.
- $L_i \leftarrow L_i + bL_j$: remplacement d'une ligne par sa somme avec un multiple d'une autre ligne.
- $L_i \leftarrow aL_i + bL_j$ (avec $a \neq 0$): regroupement en une opération des deux opérations précédentes.

Proposition 5.1 Les opérations élémentaires transforment tout système en un système équivalent.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 7y & + & 11z & = & 1 \\ -\ x & + & 12y & - & 19z & = & 2 \\ & - & 3y & + & 5z & = & 3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 7y & + & 11z & = & 1 \\ & & 5y & - & 8z & = & 3 \\ & - & 3y & + & 5z & = & 3 \end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

Attention ! Il est très important de n'appliquer qu'une opération élémentaire à la fois. Sinon, on peut obtenir un système qui **n'est plus** équivalent.

5.3.2 Principe de la méthode

L'idée est simple: utiliser les opérations élémentaires pour faire disparaître l'inconnue x_1 dans toutes les lignes sauf la première puis recommencer avec le sous-système constitué des lignes L_2 à L_n. On obtient finalement (en recommençant un nombre fini de fois la méthode) un système échelonné.

Théorème 5.1

- Tout système linéaire (S) peut être transformé à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes (via la méthode du pivot de Gauss) en un système échelonné (S') qui lui est équivalent.
- Dans le cas où (S) est un système de n équations à n inconnues, alors (S) est un système de Cramer si et seulement si le système échelonné (S') (qui est alors triangulaire) possède n pivots tous non nuls.

Appliquons cette méthode sur un exemple.

Exemple 5.5 On souhaite résoudre le système :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} & - & y & + & 2z & = & 7 \\ 2x & + & 3y & + & 4z & = & 1 \\ x & + & y & - & z & = & -4 \end{array}\right.$$

Première étape : Il faut que la première ligne contienne la première inconnue (ici x). Si ce n'est pas le cas, on échange la première ligne avec une autre ligne qui contient x (avec si possible le coefficient 1 ou -1 pour simplifier les calculs suivants).

Ici, on échange donc les lignes 1 et 3. Le système devient :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -4 \\ 2x & + & 3y & + & 4z & = & 1 \\ & - & y & + & 2z & = & 7 \end{array}\right. \qquad L_1 \leftrightarrow L_3$$

Puis à l'aide des autres opérations élémentaires, on fait « disparaître » la première inconnue dans les autres lignes. En d'autres termes, on « nettoie » la première colonne des x.

On commence par supprimer le x dans la deuxième ligne :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -4 \\ & & y & + & 6z & = & 9 \\ & - & y & + & 2z & = & 7 \end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

Puis on supprime le x dans la troisième ligne : il n'y a rien à faire ici.

Deuxième étape : **On ne modifie plus et on n'échange plus la ligne 1**. Il faut ensuite que la deuxième équation contienne la deuxième inconnue (ici y). Si ce n'est pas le cas, on échange la deuxième ligne avec une autre ligne contenant y (si possible avec le coefficient 1 pour simplifier les calculs suivants), mais **sans utiliser la ligne 1**.

Ici il n'y a rien à faire : la deuxième ligne contient déjà y.

Puis à l'aide des autres opérations élémentaires, on fait « disparaître » la deuxième inconnue dans la troisième ligne. En d'autres termes, on « nettoie » la deuxième colonne des y.

Il suffit ici d'additionner les lignes 2 et 3 :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -4 \\ & & y & + & 6z & = & 9 \\ & & & & 8z & = & 16 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

Troisième étape : On obtient alors un système échelonné (ici il est même triangulaire) que l'on sait résoudre.

La troisième équation donne $z = \dfrac{16}{8} = 2$. En remplaçant z dans la deuxième équation, on obtient $y + 6 \times 2 = 9$ soit $y + 12 = 9$. Ainsi, $y = 9 - 12 = -3$. Enfin, en remplaçant y et z dans la première ligne, on obtient : $x - 3 - 2 = -4$ soit $x - 5 = -4$. D'où $x = -4 + 5 = 1$. Ainsi, l'unique solution du système est :

$$\mathscr{S} = \{(1, -3, 2)\}.$$

*Remarque : La résolution d'un système linéaire par la méthode du pivot de Gauss n'est pas difficile car c'est toujours la même chose. Elle est, en revanche, très calculatoire. Les erreurs de calculs sont très vite arrivées. Il faut donc prendre son temps et vérifier que le (les) p-uplet(s) obtenu(s) est (sont) bien solution(s) du système. Il est également impératif d'**écrire les opérations élémentaires** que vous effectuez étape après étape.*

Exercice type 5.1 En utilisant la méthode du pivot de Gauss, résoudre le système:

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & + & y & - & 3z & + & 2t & = & 7 \\ x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 \\ 2x & - & 3y & - & 2z & + & t & = & -4 \\ -x & & & + & 5z & - & 3t & = & -11 \end{array}\right.$$

On commence par échanger la ligne 1 et la ligne 2 pour avoir un coefficient égal à 1 devant le x et simplifier les calculs.

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 \\ 3x & + & y & - & 3z & + & 2t & = & 7 \\ 2x & - & 3y & - & 2z & + & t & = & -4 \\ -x & & & + & 5z & - & 3t & = & -11 \end{array}\right. \qquad L_1 \leftrightarrow L_2$$

On fait « disparaître » le x dans lignes 2 à 4.

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 \\ & & 7y & - & 6z & + & 5t & = & 34 \\ & & y & - & 4z & + & 3t & = & 14 \\ & - & 2y & + & 6z & - & 4t & = & -20 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{array}$$

On ne modifie plus la ligne 1, on échange alors les lignes 2 et 3 pour avoir le y en pivot.

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 \\ & & y & - & 4z & + & 3t & = & 14 \\ & & 7y & - & 6z & + & 5t & = & 34 \\ & - & 2y & + & 6z & - & 4t & = & -20 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$(S) \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 \\ & & y & - & 4z & + & 3t & = & 14 \\ & & & & 22z & - & 16t & = & -64 \\ & & & - & 2z & + & 2t & = & 8 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 7L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2 \end{array}$$

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 \\ & & y & - & 4z & + & 3t & = & 14 \\ & & 7y & - & 6z & + & 5t & = & 34 \\ & - & 2y & + & 6z & - & 4t & = & -20 \end{array}\right. \qquad L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$(S) \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 \\ & & y & - & 4z & + & 3t & = & 14 \\ & & & & 22z & - & 16t & = & -64 \\ & & & & & & 6t & = & 24 \end{array}\right. \qquad L_4 \leftarrow 11L_4 + L_3$$

On obtient un système triangulaire qu'il est alors facile de résoudre en « remontant ».

$$(S) \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2y - z + 4 - 9 \\ y & = & -4z + 3 \times 4 + 14 \\ 22z & = & -16 \times 4 - 64 \\ t & = & 4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 4 + 4 - 9 = -1 \\ y & = & -3 \times 4 + 14 = 2 \\ z & = & 0 \\ t & = & 4 \end{array}\right.$$

Ainsi $\mathscr{S} = \{(-1, 2, 0, 4)\}$.