

# 4. Fonctions usuelles

<b>4.1</b>	<b>Généralités sur les fonctions</b>	<b>1</b>
4.1.1	Ensemble de définition	
4.1.2	Courbe représentative	
4.1.3	Composée de fonctions	
4.1.4	Parité	
4.1.5	Monotonie	
4.1.6	Périodicité	
4.1.7	Éléments remarquables	
<b>4.2</b>	<b>Fonctions de référence</b>	<b>10</b>
4.2.1	Fonctions polynômes et fonction inverse	
4.2.2	Fonctions logarithme népérien et exponentielle	
4.2.3	Fonctions puissances	
4.2.4	Fonctions valeur absolue et partie entière	
4.2.5	Fonctions trigonométriques	
<b>4.3</b>	<b>Dérivation: rappel des formules</b>	<b>32</b>

Do not worry about your difficulties in mathematics; I can assure you that mine are still greater.

*Albert Einstein*

*Dans ce chapitre, sont rappelées certaines généralités sur les fonctions (monotonie, maximum, minimum...) auxquelles sont ajoutés des compléments permettant d'approfondir l'étude des fonctions (parité, périodicité, composée de fonctions...). On revoit également les fonctions usuelles et on introduit de nouvelles fonctions (la fonction valeur absolue, la fonction partie entière et les fonctions trigonométriques).*

## 4.1 Généralités sur les fonctions

### 4.1.1 Ensemble de définition

**Définition 4.1** On appelle **fonction** un procédé qui à un nombre  $x$  appartenant à un ensemble  $\mathcal{D}$  associe un **unique** nombre  $y$ . On note :

$$\begin{aligned} f &: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

$f(x)$  est appelé **l'image** de  $x$  par  $f$ , tandis que  $x$  est appelé **antécédent** de  $f(x)$  par  $f$ .

**Exemple 4.1** Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = 2x + 3$ .

- L'image de 2 est  $f(2)$

- Les antécédents de 4 vérifient  $f(x) = 4$  c'est-à-dire



*Remarque* : Il peut y avoir un, plusieurs ou même aucun antécédent. Par contre, il ne peut y avoir qu'une seule image !

**Définition 4.2** On appelle **ensemble de définition** d'une fonction  $f$ , noté  $\mathcal{D}_f$  en général, l'ensemble de tous les nombres  $x$  où  $f(x)$  est définie *i.e.* où l'on peut calculer  $f(x)$ .

**Exemple 4.2** 1. La fonction  $f$  définie par  $f(x) = 2x+3$  a pour ensemble de définition:

2. La fonction  $g : x \mapsto \frac{1}{2x-4}$  a pour ensemble de définition:

**Proposition 4.1** Soient  $N$ ,  $D$ ,  $A$  et  $B$  quatre réels.

- La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est définie sur  $\mathbb{R}^*$  donc  $\frac{N}{D}$  existe  $\iff D \neq 0$ .
- La fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est définie sur  $\mathbb{R}_+$  donc  $\sqrt{A}$  existe  $\iff A \geq 0$ .
- La fonction  $x \mapsto \ln(x)$  est définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  donc  $\ln(B)$  existe  $\iff B > 0$ .

**Exercice 4.1** Déterminer le domaine de définition de chacune des trois fonctions définies par:

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2-4} \quad g(x) = \sqrt{1-x} \quad h(x) = \ln(x^2-9).$$

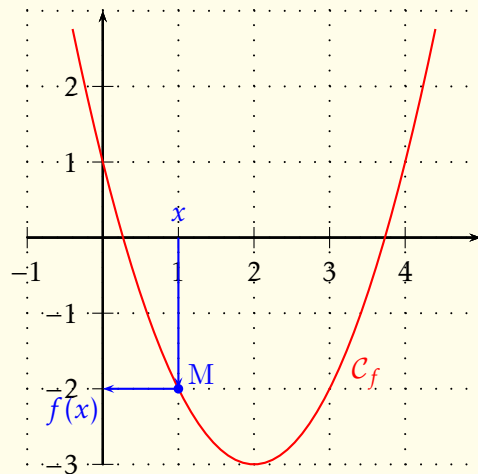
1.

2.

3.

### 4.1.2 Courbe représentative

**Définition 4.3** Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathcal{D}_f$  et soit  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  un repère du plan (le plus souvent orthonormé). La **courbe représentative** de la fonction  $f$  est l'ensemble des points  $M$  du plan de coordonnées  $(x, f(x))$  avec  $x \in \mathcal{D}_f$ .



Notations : Elle est notée traditionnellement  $\mathcal{C}_f$  :

$$\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathcal{D}_f\}.$$



Remarque : On a l'équivalence :  $\forall x \in \mathcal{D}_f \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad M(x, y) \in \mathcal{C}_f \iff y = f(x)$ .



### 4.1.3 Composée de fonctions

**Définition 4.4 (Ensemble image)** Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathcal{D}_f$ . Soit  $E$  une partie de  $\mathbb{R}$  tel que  $E \subset \mathcal{D}_f$ . On appelle **ensemble image** de  $E$  par la fonction  $f$  et on note  $f(E)$  l'ensemble:

$$f(E) = \{f(x) \mid x \in E\} = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in E, y = f(x)\}.$$

**Exemple 4.3** Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ . Déterminons son domaine de définition et son domaine image sachant que son tableau de variation est le suivant.

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$		-		+
$f$	$+\infty$			$+\infty$
		0	0	

Diagramme de variation pour  $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ . Le tableau ci-dessus indique que la fonction est définie sur  $x \leq -1$  et  $x \geq 1$ . La dérivée est négative pour  $x < -1$  et positive pour  $x > 1$ . Les valeurs de la fonction sont  $+\infty$  aux bornes et 0 aux points critiques  $x = -1$  et  $x = 1$ . Des flèches dans le tableau indiquent la direction de la fonction vers les points critiques.

Il peut parfois être utile de déterminer  $f(\mathcal{D}_f)$  notamment lorsqu'on compose des fonctions, comme on va le voir dans ce qui suit.

**Définition 4.5 (Composée de fonctions)** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies respectivement sur  $\mathcal{D}_f$  et  $\mathcal{D}_g$  telles que  $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$ . La composée de la fonction  $f$  par  $g$  est la fonction, notée  $g \circ f$  (qui se lit «  $g$  rond  $f$  ») est la fonction définie sur  $\mathcal{D}_f$  par

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

**Exercice 4.2** On considère les fonctions suivantes :

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = \sqrt{x}, \quad h(x) = e^x.$$

Donner l'expression des fonctions composées suivantes :

1.  $f \circ g$

2.  $g \circ f$

3.  $f \circ h$

4.  $h \circ f$

5.  $g \circ h$

6.  $h \circ g$

#### 4.1.4 Parité

- Définition 4.6**
- Une fonction  $f$  est **paire** si :  $\forall x \in \mathcal{D}_f, -x \in \mathcal{D}_f$  et  $f(-x) = f(x)$ .
  - Une fonction  $f$  est **impaire** si :  $\forall x \in \mathcal{D}_f, -x \in \mathcal{D}_f$  et  $f(-x) = -f(x)$ .

- Exemple 4.4**
- La fonction carré  $x \mapsto x^2$  est une fonction paire.
  - La fonction inverse  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est une fonction impaire.

Remarque : Lorsque le domaine de définition  $\mathcal{D}_f$  d'une fonction  $f$  vérifie la condition:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathcal{D}_f \Rightarrow -x \in \mathcal{D}_f$$

on dit que le domaine de définition  $\mathcal{D}_f$  est **symétrique par rapport à zéro**.

- Exemple 4.5**
- L'ensemble  $]-\infty; -5[ \cup ]5; +\infty[$  est symétrique par rapport à zéro.
  - L'ensemble  $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$  est symétrique par rapport à zéro.
  - L'ensemble  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  n'est pas symétrique par rapport à zéro.

**Méthode 4.1 (Etude de la parité d'une fonction)**

1. On commence par déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $f$  et on détermine si  $\mathcal{D}_f$  est symétrique par rapport à zéro ou non. Si c'est le cas, on passe à la deuxième étape, et si ce n'est pas le cas,  $f$  n'est ni paire ni impaire.

2. Pour un  $x$  quelconque dans  $\mathcal{D}_f$ , on compare  $f(-x)$  avec  $f(x)$  ou avec  $-f(x)$ :



- si  $f(-x) = f(x)$  alors la fonction  $f$  est paire,
- si  $f(-x) = -f(x)$  alors la fonction  $f$  est impaire,
- enfin, si on trouve un réel  $x_0 \in \mathcal{D}_f$  tel que  $f(-x_0) \neq f(x_0)$  et  $f(-x_0) \neq -f(x_0)$  alors  $f$  n'est ni paire ni impaire.

**Exemple 4.6** Etudions la parité des fonctions suivantes :

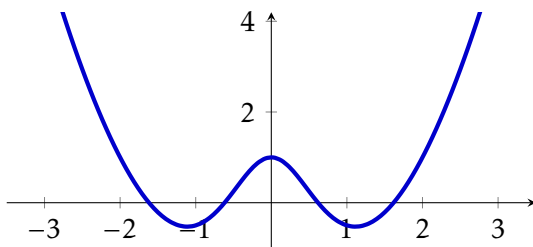
$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x} \quad g(x) = \frac{x^5}{x^2 - 4} \quad h(x) = x^3 - x^2.$$

1.

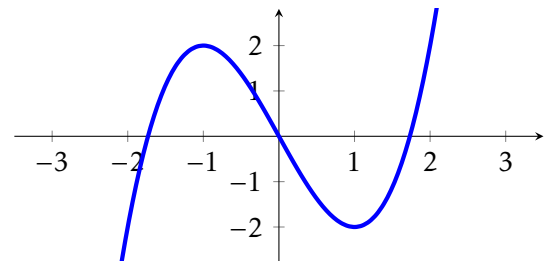
2.

3.

- Propriété 4.1**
- Si une fonction est paire, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
  - Si une fonction est impaire, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.



Courbe représentative d'une fonction paire



Courbe représentative d'une fonction impaire

## 4.1.5 Monotonie

**Définition 4.7** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

1.  $f$  est dite **croissante** sur  $I$  si :

$$\forall x, y \in I, \quad x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

3.  $f$  est dite **décroissante** sur  $I$  si :

$$\forall x, y \in I, \quad x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y).$$

2.  $f$  est dite **strictement croissante** sur  $I$  si :

$$\forall x, y \in I, \quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

4.  $f$  est dite **strictement décroissante** sur  $I$  si :

$$\forall x, y \in I, \quad x < y \Rightarrow f(x) > f(y).$$

Lorsque  $f$  est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou décroissante), on dit que  $f$  est **monotone** (resp. **strictement monotone**).

Enfin,  $f$  est dite **constante** sur  $I$  lorsque :  $\forall x, y \in I, \quad f(x) = f(y)$ .

Remarque :

- On dit qu'une fonction croissante conserve l'ordre et qu'une fonction décroissante inverse l'ordre.
- Il existe des fonctions qui ne sont pas monotones, c'est-à-dire qui ne sont ni croissantes ni décroissantes.



**Proposition 4.2** • La somme de deux fonctions croissantes (resp. décroissantes) est croissante (resp. décroissante).

- La composée de deux fonctions ayant le même sens de variation est croissante.
- La composée de deux fonctions ayant des sens de variation opposé est décroissante.

Remarque : Pour retenir les deux derniers points de cette proposition, on peut remarquer une analogie avec la règle du signe d'un produit.

Si « croissante » = « + » et « décroissante » = « - », on a bien « + × + = + », « - × - = + » et « + × - = - ».



Démonstration.

-

•

□

### 4.1.6 Périodicité

**Définition 4.8** Soit  $f$  une fonction et  $\mathcal{D}_f$  son domaine de définition. La fonction  $f$  est dite périodique lorsqu'il existe un réel  $T$  non nul tel que :

$$x \in \mathcal{D}_f \iff x + T \in \mathcal{D}_f \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f(x + T) = f(x).$$

On dit alors que  $f$  est  $T$ -périodique et le réel  $T$  est appelé une période de  $f$ .

### 4.1.7 Eléments remarquables

#### Majorant, minorant

**Définition 4.9** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

- On dit que la fonction  $f$  est **majorée** sur  $I$  s'il existe un réel  $M$  tel que:

$$\forall x \in I \quad f(x) \leq M.$$

On dit alors que  $M$  est un **majorant** de  $f$  sur  $I$  ou encore que le réel  $M$  majore la fonction  $f$  sur  $I$ .

- On dit que la fonction  $f$  est **minorée** sur  $I$  s'il existe un réel  $m$  tel que:

$$\forall x \in I \quad f(x) \geq m.$$

On dit alors que  $m$  est un **minorant** de  $f$  sur  $I$  ou encore que le réel  $m$  minore la fonction  $f$  sur  $I$ .

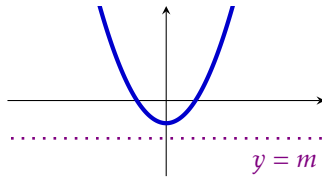
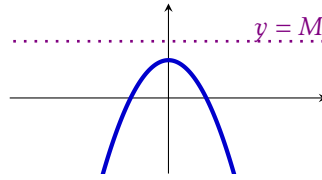
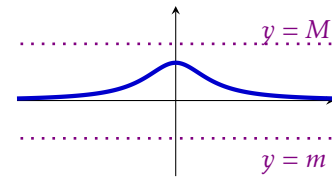
- On dit que  $f$  est **bornée** sur  $I$  si elle est à la fois majorée et minorée sur  $I$ :

$$\exists m \in \mathbb{R} \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad m \leq f(x) \leq M.$$



*Remarque :* Graphiquement, une fonction  $f$  est majorée par un réel  $M$  (resp. minorée par un réel  $m$ ) lorsque sa courbe représentative est située au-dessous (resp. au-dessus) de la droite horizontale d'équation  $y = M$  (resp.  $y = m$ ).



**Fonction minorée****Fonction majorée****Fonction bornée**

**Exemple 4.7** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ . En dressant le tableau de variation de  $f$ , on peut montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 < f(x) \leq 1.$$

### Maximum, minimum

**Définition 4.10** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

- On dit que la fonction  $f$  admet un **maximum** en  $x_0$  sur  $I$  lorsque:

$$x_0 \in I \quad \text{et} \quad \forall x \in I \quad f(x) \leq f(x_0).$$

On note alors  $\max_{x \in I} f(x) = f(x_0)$ .

- On dit que la fonction  $f$  admet un **minimum** en  $x_0$  sur  $I$  lorsque:

$$x_0 \in I \quad \text{et} \quad \forall x \in I \quad f(x) \geq f(x_0).$$

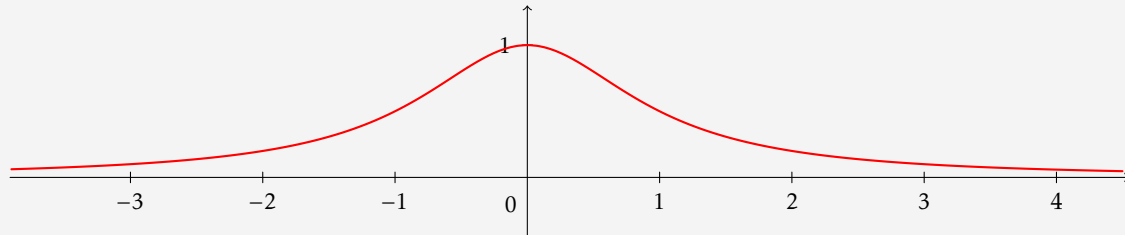
On note alors  $\min_{x \in I} f(x) = f(x_0)$ .

- Un **extremum** de  $f$  sur  $I$  est soit un maximum soit un minimum de  $f$  sur  $I$ .

Remarque : Si  $f(x_0)$  est un extremum sur un intervalle ouvert contenant  $x_0$ , mais pas sur  $I$  tout entier, on dit que  $f(x_0)$  est un **extremum local**.



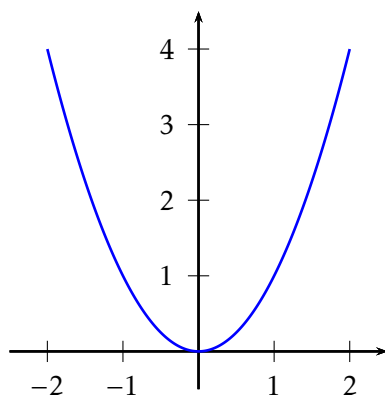
**Exemple 4.8** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ . On sait que:  $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq f(0) = 1$ . Donc la fonction  $f$  admet un maximum en  $x_0 = 0$  sur  $\mathbb{R}$ :  $\max_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{x^2 + 1} = 1$ . Par contre, la fonction  $f$  n'admet pas de minimum sur  $\mathbb{R}$  (et pourtant elle est minorée sur  $\mathbb{R}$ ).



## 4.2 Fonctions de référence

### 4.2.1 Fonctions polynômes et fonction inverse

#### La fonction carré



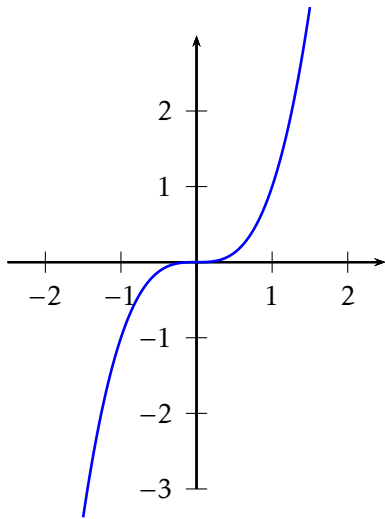
**Théorème 4.1** La fonction carré  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ ; x \mapsto x^2$ .

- est à valeurs positives ;
- est paire ;
- est strictement décroissante sur  $] -\infty ; 0 ]$  et strictement croissante sur  $[ 0 ; +\infty [$ .



*Remarque :* Plus généralement, pour tout entier naturel  $n$  non nul, la fonction  $x \rightarrow x^{2n}$  est paire et est strictement décroissante sur  $] -\infty ; 0 ]$  et strictement croissante sur  $[ 0 ; +\infty [$ .

## La fonction cube



**Théorème 4.2** La fonction cube  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^3$

- est impaire ;
- est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  ;
- n'est ni majorée, ni minorée sur  $\mathbb{R}$ .

*Remarque* : Plus généralement, pour tout entier naturel  $n$ , la fonction  $x \rightarrow x^{2n+1}$  est impaire et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

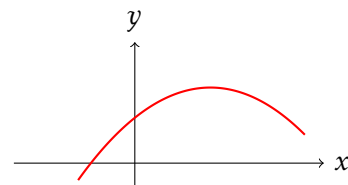
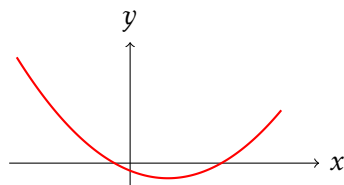


## Les fonctions trinômes du second degré

**Définition 4.11** Soient  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois réels avec  $a \neq 0$ . Soit  $T$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par:  $T(x) = ax^2 + bx + c$ .

On dit que  $T$  est une **fonction polynôme de degré 2** ou encore une **fonction trinôme du second degré**.

La représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré est une **parabole**, orientée vers le haut si  $a > 0$  et orientée vers le bas si  $a < 0$ :



Comme déjà rappelé dans le Chapitre 1, nous avons le théorème suivant :

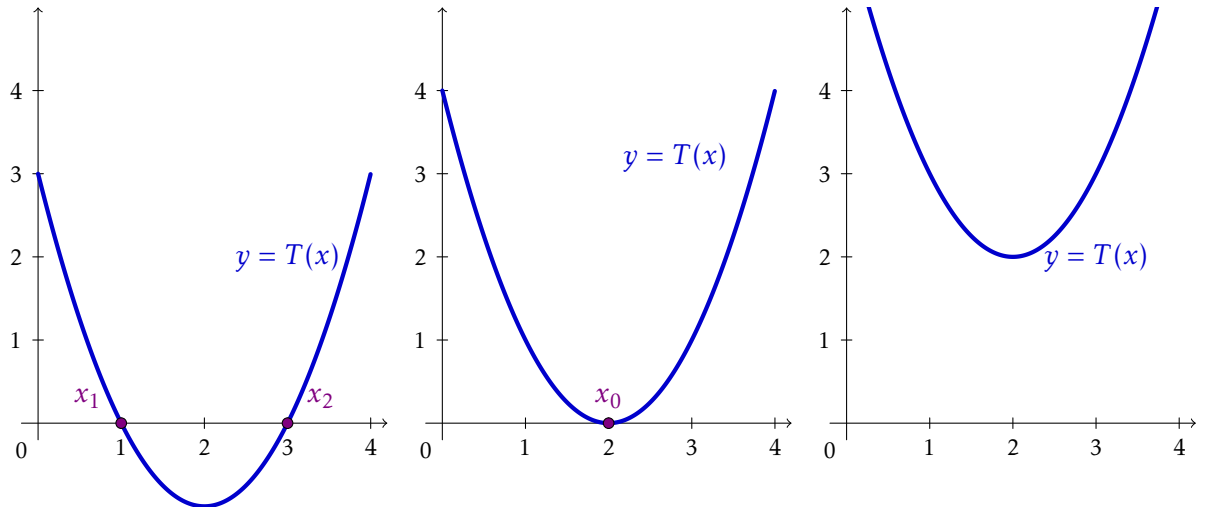
**Théorème 4.3** Soit  $T : x \mapsto ax^2 + bx + c$  une fonction trinôme du second degré.

- Si  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$  alors l'équation  $T(x) = 0$  admet deux solutions réelles distinctes  $x_1$  et  $x_2$  avec :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

On a alors la factorisation:  $T(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ . On dit que  $x_1$  et  $x_2$  sont les **racines** de  $T$ .

- Si  $\Delta = 0$  alors l'équation  $T(x) = 0$  admet une seule solution  $x_0$  avec  $x_0 = \frac{-b}{2a}$ . On a alors la factorisation:  $T(x) = a(x - x_0)^2$ . On dit que  $x_0$  est la **racine double** de  $T$ .
- Si  $\Delta < 0$  alors l'équation  $T(x) = 0$  n'admet pas de solution dans  $\mathbb{R}$ . Il n'y a pas de factorisation possible dans  $\mathbb{R}$ . On dit que  $T$  n'admet pas de racine réelle.

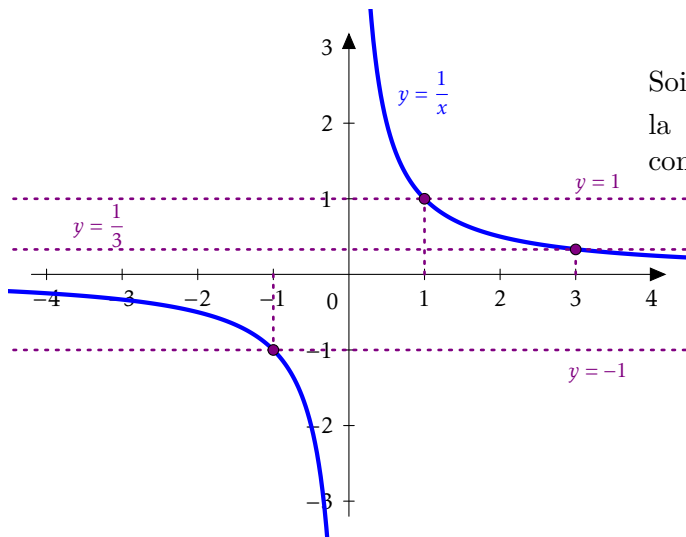


**Proposition 4.3** Soient  $s$  et  $p$  deux réels. Alors pour tous réels  $x_1$  et  $x_2$ , on a l'équivalence:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = s \\ x_1 x_2 = p \end{cases} \iff x_1 \text{ et } x_2 \text{ sont les racines du trinôme } T(x) = x^2 - sx + p.$$

**Exercice 4.3** Trouver deux réels  $x_1$  et  $x_2$  dont la somme vaut 4 et le produit vaut 1.

## La fonction inverse



Soit  $h$  la fonction inverse  $h : x \mapsto \frac{1}{x}$  dont la courbe représentative est donnée ci-contre.

- Son ensemble de définition est  $\mathcal{D}_h$ . En effet,  $\frac{1}{x}$  n'est pas défini pour  $x = 0$ .
- L'image de 1 est 1 et l'image de -1 est -1.
- L'unique antécédent de  $\frac{1}{3}$  est 3.

**Théorème 4.4** La fonction inverse  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^* ; x \mapsto \frac{1}{x}$

- est impaire ;
- est strictement décroissante sur  $] -\infty ; 0[$  et sur  $] 0 ; +\infty[$  ;
- n'est ni majorée, ni minorée sur  $\mathbb{R}^*$ .

## 4.2.2 Fonctions logarithme népérien et exponentielle

## La fonction logarithme népérien

**Définition 4.12** La fonction **logarithme népérien**, notée  $\ln$ , est l'unique primitive de la fonction inverse sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  qui s'annule en 1. Autrement dit :

$$\forall x \in ]0 ; +\infty[ \quad \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

**Propriété 4.2** La fonction  $\ln$  est définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Elle est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et sa dérivée est  $x \mapsto \frac{1}{x}$ . De plus,  $\ln(1) = 0$ .

La fonction  $\ln$  possède des propriétés tout à fait remarquables, la première d'entre elles étant de transformer les produits en sommes.

**Proposition 4.4** 1.  $\forall a \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall b \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b).$

2.  $\forall a \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a).$

3.  $\forall a \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall b \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b).$

4.  $\forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall a \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln(a^n) = n \ln(a).$

5.  $\forall a \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a).$

**Exemple 4.9** Soient  $x$  et  $y > 0$ . Simplifier le plus possible les expressions suivantes.

1.  $\ln(2x) - \ln(x)$

4.  $2\ln(x^3) + \ln\left(\frac{1}{x^3}\right)$

2.  $\ln(x^2) - \ln(x)$

5.  $\ln(1) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$

3.  $\ln(x) - \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

6.  $\ln\left(\frac{x}{y}\right) + \ln\left(\frac{y}{x}\right)$

**Propriété 4.3** • La fonction  $\ln$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

• Limites usuelles:

•  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty.$

•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0.$  *Croissance comparée*

On déduit de la stricte croissance de la fonction  $\ln$  les propriétés suivantes :

**Proposition 4.5** Pour tous réels  $a$  et  $b$  strictement positifs :

- $\ln a = \ln b$  si, et seulement si,  $a = b$ ,
- $\ln a > \ln b$  si, et seulement si,  $a > b$ .

**Exercice 4.4** Résoudre dans l'intervalle  $I$  les équations suivantes :

1.  $\ln(x+2) = 2\ln(x)$  sur  $I = ]0; +\infty[.$

$$2. \ln(2x - 3) + \ln(3) = 2\ln(x) \text{ sur } I = ]\frac{3}{2}; +\infty[.$$

**Exercice 4.5** Résoudre dans l'intervalle  $I$  les inéquations suivantes :

$$1. \ln(2x) < \ln(x + 7) \text{ sur } I = ]0; +\infty[.$$

$$2. \ln(3x + 1) - \ln(x + 1) \geq \ln(2) \text{ sur } I = ]-\frac{1}{3}; +\infty[.$$

On a vu que la fonction  $\ln$  était continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ . De plus,  $\ln(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$  et  $1 \in \mathbb{R}$  donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $\ln(x) = 1$  admet une unique solution dans  $\mathbb{R}_+^*$ .

**Définition 4.13** L'unique solution dans  $\mathbb{R}_+^*$  de l'équation  $\ln(x) = 1$  est notée  $e$  : c'est la **constante de Neper**. On a :  $e \simeq 2,718$ .

$$\ln(x) = 1 \iff x = e.$$

*Notations* : Plus généralement, pour tout  $y$  dans  $\mathbb{R}$ , l'équation  $\ln(x) = y$  admet une unique solution dans  $\mathbb{R}_+^*$ . On convient de noter  $e^y$  cette solution car l'unique solution de l'équation  $\ln(x) = n$  (avec  $n \in \mathbb{Z}$ ) n'est autre que le nombre  $e^n$ . En effet:



$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \ln(e^n) = n \ln(e) = n.$$

### La fonction exponentielle

**Définition 4.14** La fonction **exponentielle** notée  $\exp$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\exp(x) = e^x$ .

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad y = \exp(x) \iff x = \ln(y).$$

Dans toute la suite, nous utiliserons indifféremment la notation  $e^x$  ou  $\exp(x)$ .

**Propriété 4.4** La fonction  $\exp$  est définie sur  $\mathbb{R}$ . Elle est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et sa dérivée est égale à elle-même. De plus,  $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$ .

La fonction  $\exp$  possède également des propriétés remarquables, héritées de celle de la fonction  $\ln$  :

**Proposition 4.6** 1.  $\forall x \in \mathbb{R} \quad \ln(e^x) = x$     et     $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad e^{\ln(x)} = x$ .

2.  $\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad e^{a+b} = e^a \times e^b$ .

3.  $\forall a \in \mathbb{R} \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a}$ .

4.  $\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$ .

5.  $\forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad e^{na} = (e^a)^n$ .

**Exercice 4.6** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

•  $e^{2t-1} = 1$

•  $\ln(3x) = \frac{1}{2}$

**Exercice 4.7** Soient  $x$  et  $y$  deux réels. Simplifier le plus possible les expressions suivantes:

1.  $\frac{(e^x)^2}{e^x}$

2.  $(e^{2x})^3 \times (e^{-x})^2$

3.  $e^0 \times e^{-x} \times (e^x)^2$

4.  $\frac{e^x}{e^y} \times e^{y-x}$



**Propriété 4.5** • La fonction  $\exp$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

• Limites usuelles:

•  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ .

•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$  et  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ . *Croissance comparée*

De la stricte croissance de l'exponentielle, on déduit la proposition suivante :

**Proposition 4.7** Pour tous réels  $a$  et  $b$  :

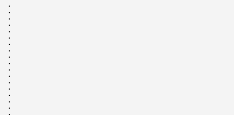
•  $e^a = e^b$  si, et seulement si,  $a = b$ .

•  $e^a > e^b$  si, et seulement si,  $a > b$ .

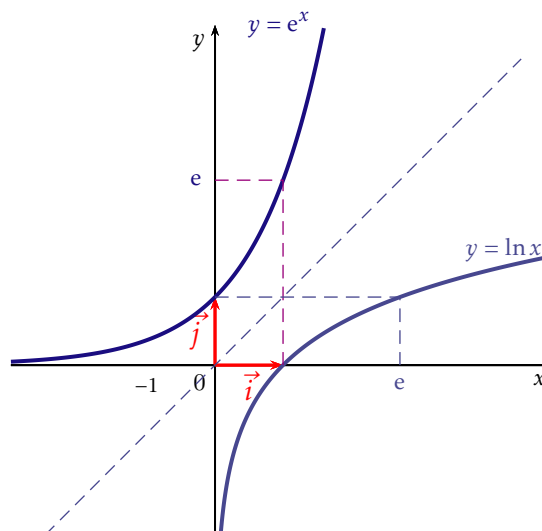
**Exercice 4.8** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations et inéquations suivantes :

1.  $\frac{e^{3x+5}}{e^{3-2x}} = e^{2x^2-1}$

2.  $e^{2x}e^{x^2} < 1$



La fonction exponentielle est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien. Dans un repère orthonormé, leurs courbes représentatives sont symétriques par rapport à la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = x$ .



### 4.2.3 Fonctions puissances

#### Généralités

**Définition 4.15** Soit  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$ . On appelle **fonction puissance**  $\alpha$  la fonction  $f_\alpha$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}.$$

**Exemple 4.10** • Pour  $\alpha = 2$ , on a  $f_2(x) = x^2$  et on retrouve la fonction carré.

- Pour  $\alpha = 3$ , on a  $f_3(x) = x^3$  et on retrouve la fonction cube.
- Pour  $\alpha = -1$ , on a  $f_{-1}(x) = \frac{1}{x}$  et on retrouve la fonction inverse.
- $\alpha$  peut également prendre des valeurs non entières. Par exemple,

$$f_{\frac{3}{2}}(x) = x^{\frac{3}{2}} = e^{\frac{3}{2} \ln(x)},$$

ou bien

$$f_{\sqrt{2}}(x) = x^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \ln(x)}.$$



**Attention !** L'écriture  $x^\alpha$  est une notation. Pour étudier une telle fonction, il faudra toujours repasser à son écriture exponentielle  $e^{\alpha \ln(x)}$ .

**Propriété 4.6** Soit  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$ . La fonction  $f_\alpha$  est dérivable (donc continue) sur  $]0; +\infty[$  et :

$$\forall x \in ]0; +\infty[ \quad f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

*Démonstration.*

□

On en déduit la propriété suivante :

**Propriété 4.7** La fonction  $f_\alpha$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$  si  $\alpha > 0$  et strictement décroissante sur  $]0; +\infty[$  si  $\alpha < 0$ .

Les règles de calculs sont les mêmes que celles vues dans le Chapitre 1 dans le cas des puissances entières, exceptées qu'elles ne sont valables que pour les  $x > 0$ .

**Proposition 4.8** Soient  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ . Soient  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $\mathbb{R}$ . Alors:

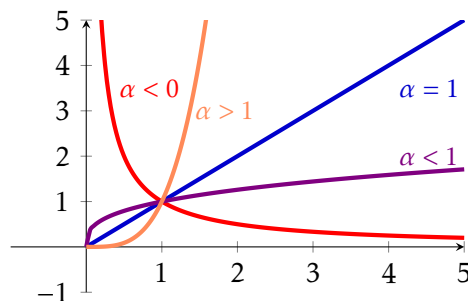
$\bullet x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$	$\bullet x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$	$\bullet \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}$
$\bullet x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}$	$\bullet (xy)^\alpha = x^\alpha \times y^\alpha$	$\bullet (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$

**Exercice 4.9** 1. Résoudre l'équation  $x^{\frac{2}{3}} = 2$ .

2. Résoudre dans  $\mathbb{N}$  l'inéquation  $0.99^n > 0.5$  en sachant que  $\frac{\ln(0.5)}{\ln(0.99)} \simeq 68,97$ .

### Représentation graphique

Voici les différentes allures de la courbe représentative de la fonction  $x \mapsto x^\alpha$  suivant les valeurs de  $\alpha \in \mathbb{R}$ .



Un cas particulier :  $\alpha = \frac{1}{2}$

**Définition 4.16** La fonction **racine carrée** est la fonction  $r$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :  $r(x) = \sqrt{x}$

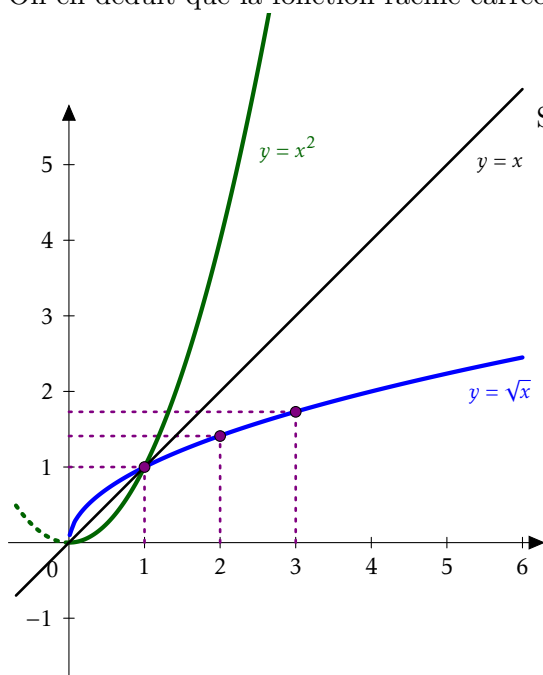


*Remarque :* On rappelle que par définition,  $\sqrt{x}$  est l'unique réel **positif** tel que  $(\sqrt{x})^2 = x$ .

**Propriété 4.8** La fonction racine carrée est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad r'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

On en déduit que la fonction racine carrée est **strictement croissante** sur  $[0; +\infty[$ .



Soit  $r$  la fonction racine carrée  $r : x \mapsto \sqrt{x}$ .

- Sa courbe représentative est la branche de parabole obtenue par symétrie par rapport à la droite  $y = x$  de la courbe représentative de la fonction carrée sur l'intervalle  $\mathbb{R}_+$ .
- Son domaine de définition est  $\mathcal{D}_r$
- Les images de 0, 1, 2 et 3 sont :

$$\begin{array}{cc} r(0) & r(1) \\ r(2) & r(3) \end{array}$$

**Propriété 4.9** La fonction racine carrée coïncide avec la fonction puissance  $\frac{1}{2}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  :  $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ .

*Démonstration.* □

### Fonctions de la forme $x \mapsto u(x)^{v(x)}$

L'expression  $u(x)^{v(x)}$  est définie pour tout réel  $x$  tel que  $u(x) > 0$ .

Pour étudier une fonction  $g$  définie par  $g(x) = u(x)^{v(x)}$ , il est utile de l'écrire sous forme exponentielle :

$$g(x) = u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln(u(x))}.$$

**Exercice type 4.1** Étudier les variations de la fonction  $f : x \mapsto x^x$  sur son domaine de définition.

## 4.2.4 Fonctions valeur absolue et partie entière

### Fonction valeur absolue

**Définition 4.17** La fonction **valeur absolue**, notée  $x \mapsto |x|$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

**Exemple 4.11**  $|2.9| = 2.9$  mais  $|-5.2| = 5.2$ . Il est clair que:  $\forall x \in \mathbb{R} \quad |x| \geq 0$ .

**Exercice 4.10** 1. Ecrire sans valeur absolue les nombres suivants  $|\sqrt{2} - 1|$  et  $|\pi - 5|$ .

2. Ecrire sans valeur absolue et en fonction de  $x$  les nombres suivants :

(a)  $|x - 2|$

$$(b) |x - 1| + |x + 2|$$

**Proposition 4.9** •  $\forall x \in \mathbb{R} \quad |x| = \sqrt{x^2}$

- $\forall x \in \mathbb{R} \quad |-x| = |x|$
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad |xy| = |x| \times |y|$
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R}^* \quad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad |x| = \max(x, -x)$

*Démonstration.*

□

**Proposition 4.10** •  $\forall a \in \mathbb{R}_+ \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |x| = a \iff (x = -a \text{ ou } x = a).$

- $\forall a \in \mathbb{R}_+ \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |x| < a \iff -a < x < a.$
- $\forall a \in \mathbb{R}_+ \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |x| > a \iff (x < -a \text{ ou } x > a).$



*Remarque :* Les inégalités strictes de deux dernières propriétés de la Proposition 4.10 peuvent être remplacées par des inégalités larges.

**Exercice 4.11** Résoudre dans  $\mathbb{R}$ .

1.  $|x + 2| = -6$

2.  $|x + 2| = 6$

**Exercice 4.12** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes:

1.  $|x| > 3$

2.  $|x + 1| < 4$

**Exercice 4.13** Montrer que:

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad |a| = |b| \iff (a = b \text{ ou } a = -b).$$

Cette équivalence nous permet de résoudre de nombreuses équations.

**Exemple 4.12** Résoudre l'équation  $|2x - 3| = |x + 1|$ .

**Proposition 4.11 (Inégalité triangulaire)**

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad |x + y| \leq |x| + |y|.$$

*Démonstration.*

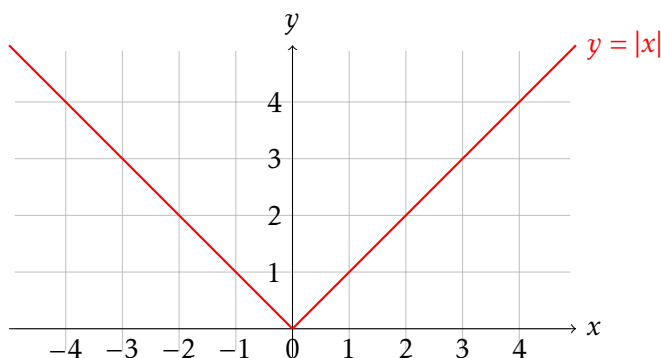
□



**Attention !** Bien noter qu'en général,  $|x + y| \neq |x| + |y|$  !  
Par exemple  $|1 + (-2)| = 1 \neq |1| + |-2| = 1 + 2 = 3$ .

**Propriété 4.10** La fonction valeur absolue est une fonction paire, strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_-$  et strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ .

Voici l'allure de la courbe représentative de la fonction valeur absolue:



**Proposition 4.12** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Alors  $|x|$  est la distance entre le point origine  $O$  d'un axe gradué et le point  $M$  d'abscisse  $x$ .

*Démonstration.*

□

**Proposition 4.13** Soient  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{R}$ . Alors  $|x - y|$  est la distance entre le point  $M$  d'abscisse  $x$  et le point  $N$  d'abscisse  $y$  d'un axe gradué.

*Démonstration.* Soient  $M(x, 0)$  et  $N(y, 0)$ . Alors  $MN = NM = \sqrt{(x - y)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{(x - y)^2} = |x - y|$ , donc  $|x - y|$  représente bien la distance entre  $M$  et  $N$ . □

### Fonction partie entière

**Définition 4.18** Soit  $x$  dans  $\mathbb{R}$ . La **partie entière** de  $x$  est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à  $x$ , noté  $\lfloor x \rfloor$ .

**Exemple 4.13** •  $\lfloor 2.5 \rfloor$  et  $\lfloor -6.5 \rfloor$  ,

•  $\lfloor e \rfloor$  et  $\lfloor -\pi \rfloor$  .



**Proposition 4.14** • Le nombre  $\lfloor x \rfloor$  est l'**unique** entier relatif satisfaisant

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

- Pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}$ , on a l'encadrement:  $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ .

**Exercice 4.14** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\lfloor 2x + 1 \rfloor = 7$ .

**Exercice 4.15** Montrer que:  $\forall x \in \mathbb{R} \quad \lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$ .

**Propriété 4.11** La fonction  $x \mapsto \lfloor x \rfloor$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .

*Remarque :* La fonction partie entière n'est pas strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ : en effet, elle est constante sur chaque intervalle  $[n; n + 1[$  où  $n \in \mathbb{Z}$ . Cela se traduit graphiquement par des « paliers » sur sa courbe, comme on peut le voir sur son graphe ci-dessous.

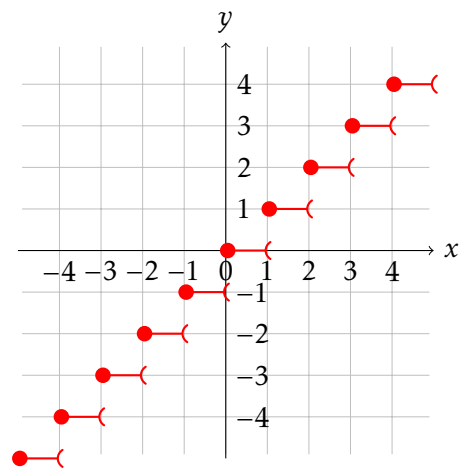


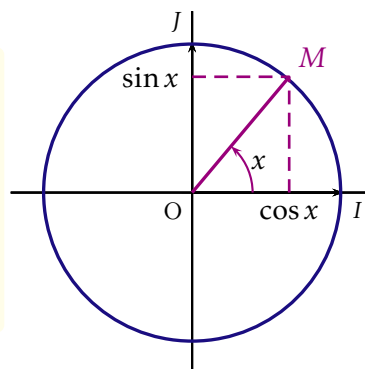
Figure 4.1: Courbe représentative de la fonction partie entière

## 4.2.5 Fonctions trigonométriques

## Rappels sur le cercle trigonométrique

**Définition 4.19** Soit  $x$  une mesure en radians de l'angle orienté  $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$  où  $M$  est un point du cercle trigonométrique.

- Le cosinus de  $x$ , noté  $\cos x$ , est l'abscisse du point  $M$ .
- Le sinus de  $x$ , noté  $\sin x$ , est l'ordonnée du point  $M$ .

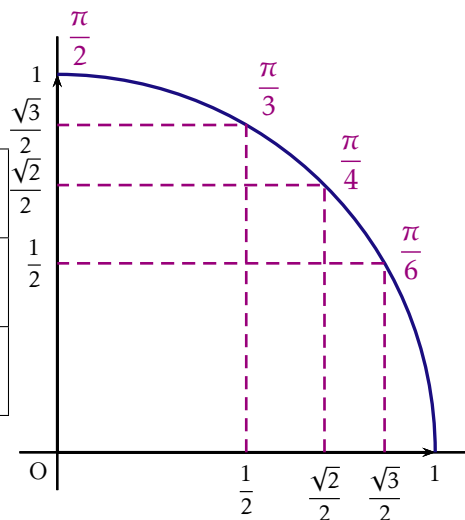


**Proposition 4.15** • Pour tout réel  $x$  et pour tout entier relatif  $k$ ,  $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$  et  $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$

- Pour tout réel  $x$ ,  $-1 \leq \cos x \leq 1$  et  $-1 \leq \sin x \leq 1$
- Pour tout réel  $x$ ,  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

## Valeurs remarquables

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



## Les fonctions cosinus et sinus

**Propriété 4.12 (Périodicité)** Pour tout réel  $x$ ,  $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$  et  $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ . On dit que les fonctions cosinus et sinus sont **périodiques** de période  $2\pi$  (on dit aussi  $2\pi$ -périodiques).



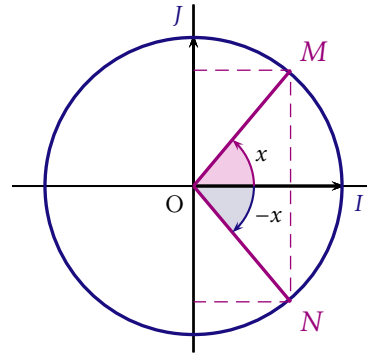
*Remarque :* La fonction cosinus (ou sinus) est entièrement connue dès qu'on connaît ses valeurs sur un intervalle  $[a; a + 2\pi[$ .

**Propriété 4.13 (Parité)**

- Pour tout réel  $x$ ,  $\cos(-x) = \cos(x)$ . On dit que la fonction cosinus est **paire**. Ainsi la courbe représentative de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Pour tout réel  $x$ ,  $\sin(-x) = -\sin(x)$ . On dit que la fonction sinus est **impaire**. Ainsi la courbe représentative de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Pour tout réel  $x$  :

$\cos(-x) = \cos x$
$\sin(-x) = -\sin x$



*Remarque :* Il suffit d'étudier les fonctions cosinus et sinus sur l'intervalle  $[0; \pi]$  pour les connaître sur  $[-\pi; \pi]$  à l'aide de la parité et enfin sur  $\mathbb{R}$  à l'aide de la périodicité.

**Propriété 4.14 (Dérivées)**

- La fonction cosinus est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\cos'(x) = -\sin(x)$ .
- La fonction sinus est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\sin'(x) = \cos(x)$ .

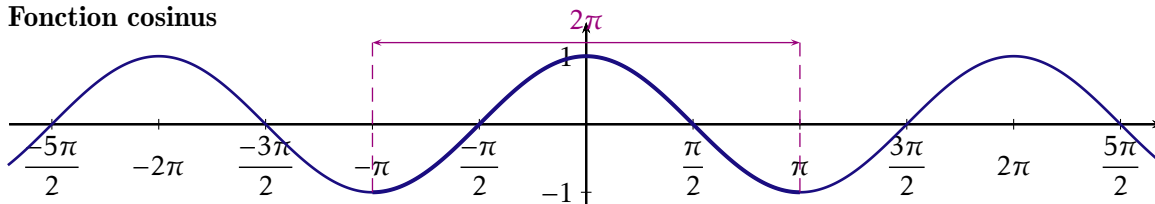
**Variations de la fonction cosinus sur  $[0; \pi]$**

$x$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
Signe de $\cos'(x)$	0	-	0
cos	1	0	-1

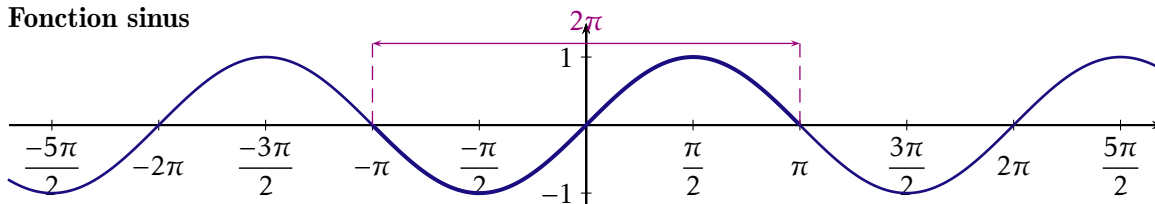
**Variations de la fonction sinus sur  $[0; \pi]$**

$x$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
Signe de $\sin'(x)$	+	0	-
sin	0	1	0

## Fonction cosinus



## Fonction sinus

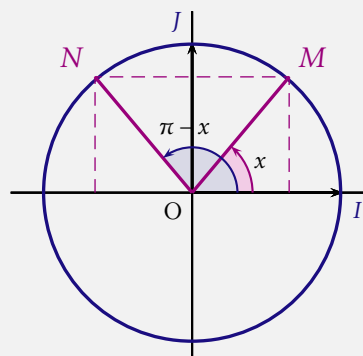


## Formules de trigonométrie

## Proposition 4.16

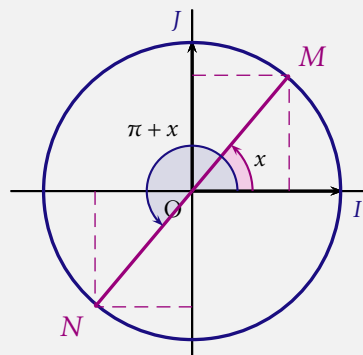
Pour tout réel  $x$  :

- $$\begin{aligned} \cos(\pi - x) &= -\cos x \\ \sin(\pi - x) &= \sin x \end{aligned}$$



Pour tout réel  $x$  :

- $$\begin{aligned} \cos(\pi + x) &= -\cos x \\ \sin(\pi + x) &= -\sin x \end{aligned}$$



**Propriété 4.15** Pour tout  $a$  et  $b$  dans  $\mathbb{R}$ , on a :

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b),$$

$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a).$$



Remarque : Avec  $a = b$ , on trouve les formules dites de duplication :

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) \quad \text{et} \quad \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a).$$

### La fonction tangente

**Définition 4.20** La fonction tangente est la fonction :

$$\tan : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \end{cases} .$$

**Exemple 4.14** On a :

- $\tan(0)$
- $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$

**Propriété 4.16 (Périodicité et parité)** La fonction tangente est impaire et  $\pi$ -périodique.

*Remarque :* La fonction tangente est entièrement connue dès qu'on connaît ses valeurs sur un intervalle  $[a; a + \pi[$ .

Grâce à la parité, la courbe représentative de la fonction tangente est symétrique par rapport à l'origine du repère. Il suffit donc d'étudier la fonction sur l'intervalle  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ .



**Propriété 4.17 (Dérivée)** La fonction tangente est dérivable sur son ensemble de définition et  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$ , on a :

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos(x)^2} = 1 + \tan(x)^2.$$

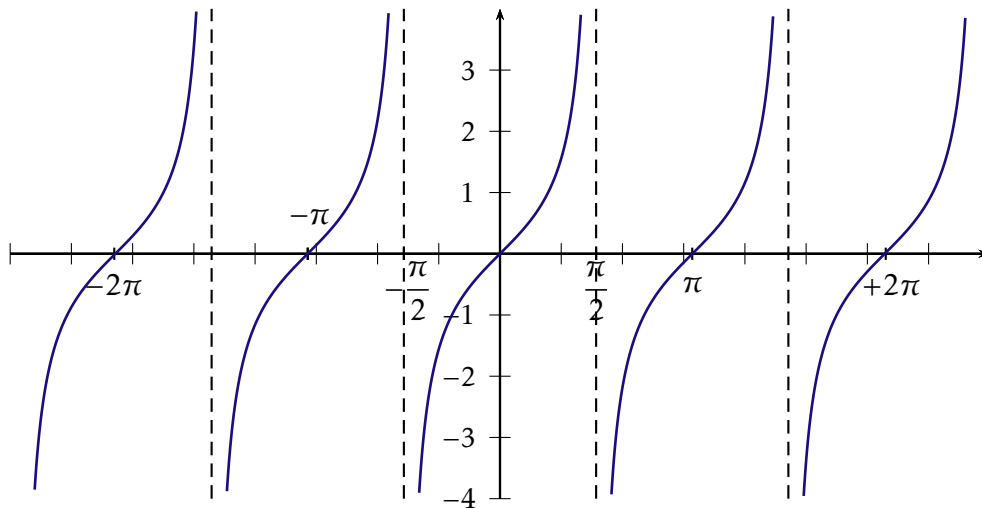
*Démonstration.*

□

Variations de la fonction tangente sur  $[0; \frac{\pi}{2}]$

$x$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
Signe de $\tan'(x)$	+		
tan	0	1	$+\infty$

La courbe représentative de la fonction tangente est la suivante :



### La fonction arctangente

La fonction tangente est continue et strictement croissante sur l'intervalle  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ . De plus,  $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\frac{\pi}{2}} \tan(x) = +\infty$ . Ainsi d'après le théorème des valeurs intermédiaires

version monotone, pour tout  $y \in \mathbb{R}$ , il existe un unique  $x \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  tel que  $\tan(x) = y$ . Cet unique  $x$  est appelé *arctangente de y* et est noté  $\arctan(y)$ .

**Définition 4.21** La fonction arctangente, notée  $\arctan$  est la fonction qui à tout  $y \in \mathbb{R}$  associe l'unique  $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$  tel que  $y = \tan(x)$ .

*Remarque :* On peut interpréter géométriquement cette définition comme suit.

Pour toute longueur  $y$ ,  $\arctan(y)$  est la longueur de l'arc  $x$  compris entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{\pi}{2}$  qui a pour tangente  $y$ .

C'est-à-dire  $\tan(x) = y$  ou encore  $\tan(\arctan(y)) = y$ .



**Exemple 4.15** On a les valeurs suivantes :

- $\arctan(0)$
- $\arctan(1)$
- $\arctan(-1)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x)$

**Proposition 4.17** • Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ .

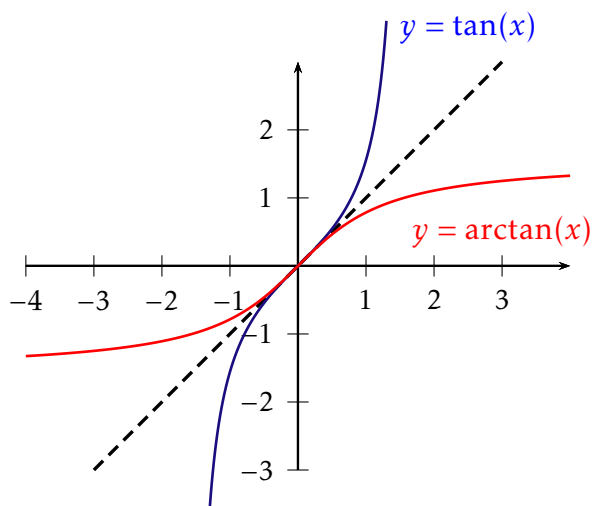
- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\tan(\arctan(x)) = x$ .
- Pour tout  $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ ,  $\arctan(\tan(x)) = x$ .

**Propriété 4.18 (Dérivée)** La fonction arctangente est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .

Variations de la fonction arctangente sur  $\mathbb{R}$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
Signe de $\arctan'(x)$	+		
$\arctan$	$-\frac{\pi}{2}$	$0$	$+\frac{\pi}{2}$

La courbe représentative de la fonction arctangente est la suivante :



### 4.3 Dérivation: rappel des formules

Dans le tableau suivant,  $\mathcal{D}$  désigne le domaine de dérivabilité de la fonction  $f$ .

$f(x)$	$f'(x)$	$\mathcal{D}$	fonction $f$	fonction dérivée $f'$
$ax + b$	$a$	$\mathbb{R}$	$\lambda u$	$\lambda u'$
$x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$	$u + v$	$u' + v'$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$uv$	$u'v + uv'$
$x^p \quad (p \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})$	$px^{p-1}$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\exp(u)$	$u' \exp(u)$
$\exp(x)$	$\exp(x)$	$\mathbb{R}$	$u^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$nu'u^{n-1}$

**Proposition 4.18** Soit  $f$  une fonction dérivable en  $a \in \mathbb{R}$ . La tangente ( $T_a$ ) à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse  $a$  admet pour équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$