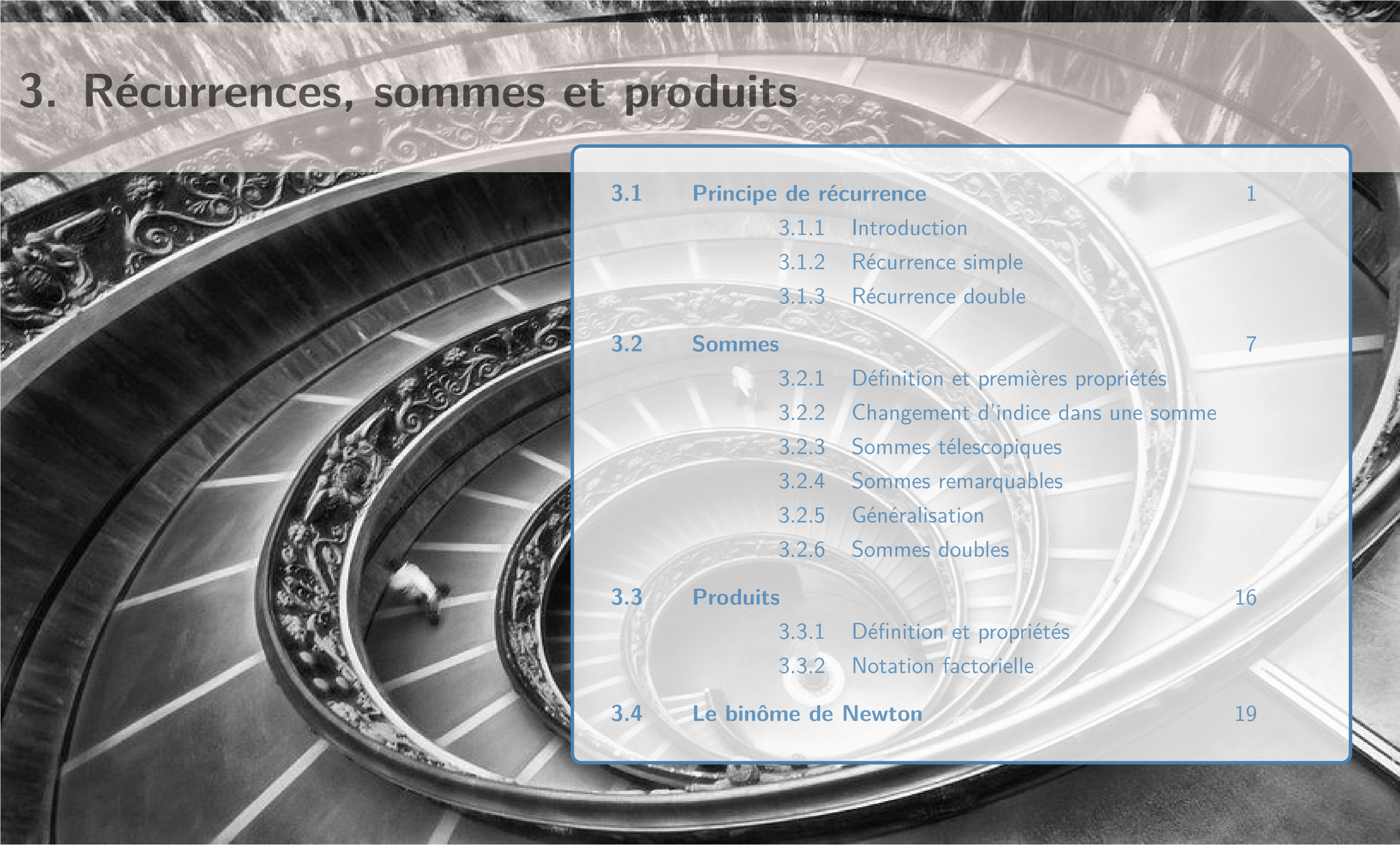

3. Récurrences, sommes et produits

En Mathématiques, « évident » est le mot le plus dangereux.

Eric Temple Bell

Dans la première partie de ce chapitre, on revoit comment bien mener un raisonnement par récurrence. Puis dans les parties suivantes, on voit ou revoit la manipulation de sommes et de produits ainsi que quelques techniques et formules classiques à bien maîtriser.

3.1 Principe de récurrence

3.1.1 Introduction

Pierre Dac a dit un jour :

« *Quand on ne travaillera plus le lendemain des jours de repos, la fatigue sera vaincue.* »

Suivant cette maxime pleine de sagesse, un gouvernement décide de faire passer le texte de loi suivant :

« *Si l'on ne travaille pas toute une journée, alors on ne travaille pas le lendemain non plus.* »

Le dimanche venu, les gens ne travaillent pas. Et selon la loi, ils ne doivent pas travailler le lendemain, *i.e* le lundi. Comme ils ne travaillent pas le lundi, ils ne doivent pas non plus travailler le mardi. Et ainsi de suite. Ainsi, plus personne ne travaillera à partir du premier jour de repos.

L'exemple précédent se traduit mathématiquement comme suit :

- Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété :
- La loi « Si l'on ne travaille pas toute une journée, alors on ne travaille pas le lendemain non plus », se traduit par :
- Le premier jour de repos permet d'écrire que

Il est très fréquent, en mathématiques, qu'on ait besoin de montrer qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par exemple, si on définit une suite avec la relation suivante :

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{u_n + 3}{u_n + 2} \end{cases}.$$

Il faudrait montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \neq -2$$

pour justifier rigoureusement que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

Nous allons revoir dans ce chapitre le raisonnement par récurrence que nous utiliserons constamment tout au long de l'année. Ce principe est très utile pour démontrer des énoncés de la forme

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathcal{P}(n)$$

où $\mathcal{P}(n)$ désigne une proposition qui dépend d'un entier $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 3.1 « $2^n \geqslant n+1$ » ou « $2 \leqslant u_n \leqslant 5$ » ou encore « $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ » sont des exemples de propositions $\mathcal{P}(n)$.
Attention : Bien noter que dans le dernier exemple, la proposition dépend de l'entier n, mais pas de l'entier k.

3.1.2 Récurrence simple

Théorème 3.1 Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition qui dépend d'un entier naturel $n \in \mathbb{N}$. Si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. **Initialisation.** $\mathcal{P}(0)$ est vraie ;
2. **Hérédité.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, ($\mathcal{P}(n)$ vraie) $\Rightarrow$ ($\mathcal{P}(n+1)$ vraie);

alors, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$.

*Remarque : Métaphoriquement, on peut se représenter le principe du raisonnement par récurrence comme une ligne infinie de dominos qu'il s'agirait de faire tomber. Si l'on est capable de faire tomber le premier domino (*i.e *si l'hypothèse* **d'initialisation** *est vérifiée), et si la chute d'un domino fait tomber le suivant (*i.e *si l'étape* **d'hérédité** *est vérifiée), alors tous les dominos vont tomber.*

Attention ! Dans le point 2, il est important de bien comprendre qu'on démontre l'implication $(\mathcal{P}(n)$ vraie$) \Rightarrow (\mathcal{P}(n+1)$ vraie$)$ et non $\mathcal{P}(n)$ ou $\mathcal{P}(n+1)$.

Illustrons désormais ce nouveau mode de raisonnement sur un exemple, afin d'en fixer les règles de rédaction (passages surlignés), auxquelles il est **très vivement** recommandé de se conformer !

Méthode 3.1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3, \quad \text{pour } n \geqslant 0. \end{cases}$.

On souhaite montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 3$.
Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété « $u_n \geqslant 3$ ».

1. **Initialisation** $u_0 = 4 \geqslant 3$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

2. **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi. Par définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $u_{n+1} = 2u_n - 3$. Or, par hypothèse de récurrence, $u_n \geqslant 3$, donc
$$u_{n+1} = 2u_n - 3 \geqslant 2 \times 3 - 3 = 3.$$
Soit $u_{n+1} \geqslant 3$. Finalement, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et la propriété $\mathcal{P}$ est héréditaire.

3. **Conclusion.** La propriété $\mathcal{P}$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, à savoir :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \geqslant 3.$$

Remarque :

- *La plupart du temps, l'initialisation est très simple, c'est une petite vérification.*
- *L'hérédité est l'étape la plus délicate. Si le raisonnement n'utilise pas l'hypothèse de récurrence, alors ou bien ce raisonnement est faux ou bien cela signifie qu'on avait en fait pas besoin de procéder par récurrence: un raisonnement direct suffisait.*

Exercice type 3.1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par:

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}$$

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 2$ et que donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie. Calculer les quatre premiers termes de la suite, conjecturer une expression de u_n en fonction de n et la démontrer par récurrence sur n.

Certaines propriétés dépendant d'un entier naturel n ne sont vraies qu'à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$. Le cas échéant, l'étape d'initialisation ne porte plus sur $\mathcal{P}(0)$ (ce qui n'aurait *a priori* pas de sens), mais sur $\mathcal{P}(n_0)$, le premier rang à partir duquel la propriété $\mathcal{P}$ est vraie. Le principe du raisonnement reste ensuite le même.

Théorème 3.2 Soit n_0 dans $\mathbb{N}$. Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition qui dépend d'un entier naturel $n \in \mathbb{N}$. Si les conditions suivantes sont vérifiées :

- **Initialisation.** $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie,
- **Hérédité.** Pour tout $n \geqslant n_0$, $(\mathcal{P}(n)$ vraie$) \Rightarrow (\mathcal{P}(n+1)$ vraie$)$;

alors, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$.

Exemple 3.2 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 5$, $2^n > n^2$.

3.1.3 Récurrence double

Intuitivement, une propriété sur l'on démontre par récurrence est une propriété dont la véracité se « propage » d'un rang à l'autre. On commence donc par démontrer qu'elle est vraie à un rang n_0 : étape d'initialisation. Puis on démontre que si elle est vraie à un rang quelconque n, alors elle l'est aussi au rang suivant : c'est l'étape d'hérédité : la véracité de la propriété se « propage »du rang n au rang suivant, $n+1$. Ceci permet de conclure qu'une telle propriété est vraie pour tous les rangs supérieurs ou égaux au rang d'initialisation n_0.

La récurrence double est une généralisation assez naturelle de ce procédé. Elle permet en effet de démontrer des propriétés dont la véracité ne se « propage » pas directement d'un rang au rang suivant, mais dont la véracité à un rang donné dépend de sa véracité aux deux rangs précédents.

Théorème 3.3 Soit n_0 dans $\mathbb{N}$. Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition qui dépend d'un entier naturel $n \in \mathbb{N}$. Si les conditions suivantes sont vérifiées :

- **Initialisation.** $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ sont vraies,
- **Hérédité.** Pour tout $n \geqslant n_0$, $(\mathcal{P}(n)$ ET $\mathcal{P}(n+1)$ vraies$) \Rightarrow (\mathcal{P}(n+2)$ vraie$)$;

alors, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$.

Méthode 3.2 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = u_1 = -1 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n, & \text{pour } n \geqslant 0. \end{cases}$.

On souhaite montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n - 2^{n+1}$.
Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété « $u_n = 3^n - 2^{n+1}$ ».

1. **Initialisation** $u_0 = -1$ et $3^0 - 2^{0+1} = 1 - 2 = -1$, ainsi $u_0 = 3^0 - 2^{0+1}$. On a également $u_1 = -1$ et $3^1 - 2^{1+1} = 3 - 4 = -1$. Ainsi $u_1 = 3^1 - 2^{1+1}$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.

2. **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraies et montrons que $\mathcal{P}(n+2)$ l'est aussi.
   Par définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
   Or, par hypothèse de récurrence, $u_n = 3^n - 2^{n+1}$ et $u_{n+1} = 3^{n+1} - 2^{n+2}$, donc
   $$\begin{aligned} u_{n+2} &= 5u_{n+1} - 6u_n = 5(3^{n+1} - 2^{n+2}) - 6(3^n - 2^{n+1}) \\ &= 5 \times 3^{n+1} - 5 \times 2^{n+2} - 6 \times 3^n + 6 \times 2^{n+1} = 3^n(5 \times 3 - 6) + 2^{n+1}(-5 \times 2 + 6) \\ &= 9 \times 3^n - 4 \times 2^{n+1} = 3^{n+2} - 2^{n+3} \end{aligned}$$
   Finalement, $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie et la propriété $\mathcal{P}$ est héréditaire.

3. **Conclusion.** La propriété $\mathcal{P}$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, à savoir :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 3^n - 2^{n+1}.$$

Exercice 3.1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_n + u_{n+1}, & \text{pour } n \geqslant 0. \end{cases}$.

Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant \left(\frac{5}{3}\right)^n$.

1.

2.

3.

3.2 Sommes

3.2.1 Définition et premières propriétés

Définition 3.1 Soient m et n dans $\mathbb{N}$ tels que $m \leqslant n$. On désigne par $[\![m;n]\!]$ l'ensemble des entiers naturels compris au sens large entre m et n:

$$[\![m;n]\!] = [n,m] \cap \mathbb{N}.$$

Proposition 3.1 Soient m et n dans $\mathbb{N}$ tels que $m \leqslant n$.

- Il y a n entiers dans l'ensemble $[\![1;n]\!]$.
- Il y a $n+1$ entiers dans l'ensemble $[\![0;n]\!]$.
- Il y a $n-m+1$ entiers dans l'ensemble $[\![m;n]\!]$.

Définition 3.2 Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Soient m et n dans $\mathbb{N}$ tels que $m \leqslant n$. On définit $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} u_k$ par :

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = u_m + u_{m+1} + \ldots + u_n$$

La notation $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} u_k$ se lit « somme des u_k pour k variant de m à n » ou « somme de k égal m à n des u_k ».
u_k s'appelle le **terme général de la somme** et k s'appelle l'**indice de sommation**.

Remarque :

- *Par convention, si $n < m$ alors* $\sum_{k=m}^{n} u_k = 0$.
- *La lettre k est une variable muette: on peut la changer par n'importe quelle autre lettre (sauf n et m!) sans changer la valeur de la somme. Par exemple:*

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{i=m}^{n} u_i = \sum_{j=m}^{n} u_j$$

- *Dans une somme, la variable muette prend toutes les valeurs entières comprises entre m et n.*
- *On peut aussi écrire:*

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{m \leqslant k \leqslant n} u_k = \sum_{k \in [\![m;n]\!]} u_k$$

Exemple 3.3

- La somme $\ln(3) + \ln(4) + \ldots + \ln(15)$ peut aussi s'écrire
- La somme $1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{100}$ peut aussi s'écrire
- L'écriture $\sum_{k=2}^{7} \frac{(-1)^k}{k}$ désigne la somme:

Propriété 3.1 Soient $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Pour tout λ dans $\mathbb{R}$ et pour tous m et n dans $\mathbb{N}$ tels que $m \leqslant n$, on a:

- $\sum_{k=m}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k$,
- $\sum_{k=m}^{n}(\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=m}^{n} a_k$,
- *Relation de Chasles :* $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{p} a_k + \sum_{k=p+1}^{n} a_k$ pour $p \in \mathbb{N}$ tel que $m \leqslant p \leqslant n-1$.

Attention ! Dans la deuxième formule, le réel λ ne dépend pas de k : une somme du type $\sum_{k=m}^{n}(a_k b_k)$ ne se simplifie pas.

Remarque : La dernière propriété implique de manière immédiate que pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a :*

$$\sum_{k=0}^{n+1} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k + u_{n+1}.$$

Cette égalité permet de démontrer un très grand nombre de formules comportant des sommes, à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

Application 3.1 Calcul de la somme classique $S_n = \sum_{k=0}^{n} k$.

Propriété 3.2 Soient $a \in \mathbb{R}$ et soient m et n dans $\mathbb{N}$ tels que $m \leqslant n$. Alors :

$$\sum_{k=m}^{n} a = (n-m+1)a$$

.

3.2.2 Changement d'indice dans une somme

Pour commencer, nous étudions le cas simple où on fait un décalage de 1.

Considérons la somme $\sum_{i=1}^{n} a_i$. On pose $j = i - 1$. Ainsi,

- $i = j + 1$.
- Lorsque $i = 1$, alors $j = 0$.
- Lorsque $i = n$, alors $j = n - 1$.

On a ainsi l'égalité:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1}.$$

Exemple 3.4 Calculer la somme $S = \sum_{i=2}^{9} \frac{i^2 + 2i - 3}{i - 1}$.

Propriété 3.3 (Changement d'indice) Soient m et n dans $\mathbb{N}$ tels que $m \leqslant n$ alors

$$\sum_{k=m}^{n} u_{k+p} = \sum_{i=m+p}^{n+p} u_i.$$

On dit alors qu'on a effectué le changement d'indice $i = k + p$.

3.2.3 Sommes télescopiques

L'idée est de pouvoir écrire le terme général de la somme comme la différence de deux termes consécutifs d'une suite.

Exemple 3.5 Calculer la somme $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$.

3.2.4 Sommes remarquables

Proposition 3.2 On a les formules suivantes :

- Soit $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
- Soit $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
- Soit $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Remarque : Pour $n \in \mathbb{N}$ *et* $q = 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$.

Démonstration.

$\square$

Application 3.2 Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Calculer les deux sommes suivantes:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (6k^2 + 4k + 1) \qquad \text{et} \qquad T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{3^{2k+1}}.$$

•

-

3.2.5 Généralisation

Définition 3.3 Soit A une partie finie de $\mathbb{N}$ et $(u_i)_{i\in A}$ une famille de nombres réels indexés par A. On note $\sum_{i\in A} u_i$ la somme de tous les éléments u_i de la famille.

Remarque : Soient n et m deux entiers tels que $n \leqslant m$, si $A = [\![n,m]\!]$ alors on retrouve la Définition 3.2.

Exemple 3.6

- Soit $N \in \mathbb{N}$, $A = \{a_1, \ldots, a_N\}$ alors :

$$\sum_{i\in A} i^2 = \qquad .$$

- Soit $A = \{1, 5, 9, 11\}$ alors :

$$\sum_{i\in A} u_i = \qquad .$$

- Soit A l'ensemble des nombres pairs compris entre 4 et 8, on a :

$$\sum_{i\in A} u_i = \qquad .$$

3.2.6 Sommes doubles

On considère une famille de nombres réels indexés par deux indices : un indice i variant entre 1 et n pour un entier n donné et un indice j variant entre 1 et p pour un entier p donné.

On peut représenter ces nombres dans un tableau où l'indice i représente le numéro de ligne et l'indice j le numéro de colonne :

$i \backslash j$	1	2	3	...	p
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	...	a_{1p}
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	...	a_{2p}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}	...	a_{np}

La somme de tous les éléments a_{ij} de ce tableau est notée $\sum\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} a_{ij}$.

Pour la calculer, on peut soit faire la somme des termes ligne par ligne et on a alors :

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{ij}.$$

soit faire la somme des termes colonne par colonne et on a alors

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} a_{ij} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}.$$

Exemple 3.7 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculons $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij$.

3.3 Produits

3.3.1 Définition et propriétés

Définition 3.4 Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Soient m et n dans $\mathbb{N}$ tels que $m \leqslant n$. On définit $\prod_{k=m}^{n} u_k$ par :

$$\prod_{k=m}^{n} u_k = u_m \times u_{m+1} \times \ldots \times u_n$$

La notation $\prod_{k=m}^{n} u_k$ se lit « produit des u_k pour k variant de m à n » ou « produit de k égal m à n des u_k ».

Remarque :

- *Par convention, si $n < m$ alors* $\prod_{k=m}^{n} u_k = 1$.
- *La lettre k est une variable muette: on peut la changer par n'importe quelle autre lettre (sauf n et m!) sans changer la valeur du produit. Par exemple :*

$$\prod_{k=m}^{n} u_k = \prod_{i=m}^{n} u_i = \prod_{j=m}^{n} u_j.$$

- *Dans un produit, la variable muette prend toutes les valeurs entières comprises entre m et n.*
- *On peut aussi écrire :* $\prod_{k=m}^{n} u_k = \prod_{m\leqslant k\leqslant n} u_k = \prod_{k\in[\![m,n]\!]} u_k.$

Exemple 3.8 Ecrivons les expressions suivantes sans le signe $\prod$.

- $\prod_{k=3}^{5} k^2$
- $\prod_{k=2}^{7} \frac{k}{k+1}$

Ecrivons les produits suivants avec le signe $\prod$.

- $1 \times 2 \times 4 \times 8 \times 16 \times 32$

- $\dfrac{3}{5} \times \dfrac{4}{6} \times \ldots \times \dfrac{9}{11}$

Propriété 3.4 Soient $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Pour tout λ dans $\mathbb{R}$ et pour tous m et n dans $\mathbb{N}$ tels que $m \leqslant n$, on a:

- $\displaystyle\prod_{k=m}^{n}(a_k \times b_k) = \left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right) \times \left(\prod_{k=m}^{n} b_k\right).$
- En supposant que $\forall k \in [\![m,n]\!] \quad b_k \neq 0$ alors : $\displaystyle\prod_{k=m}^{n}\left(\frac{a_k}{b_k}\right) = \frac{\displaystyle\prod_{k=m}^{n} a_k}{\displaystyle\prod_{k=m}^{n} b_k}.$
- *Relation de Chasles :* $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} a_k = \prod_{k=m}^{p} a_k \times \prod_{k=p+1}^{n} a_k \quad$ pour $p \in \mathbb{N}$ tel que $m \leqslant p \leqslant n-1$.

INTERDIT ! Un produit de la forme $\displaystyle\prod_{k=m}^{n}(a_k + b_k)$ ne se simplifie pas!

Exemple 3.9 Calculons les deux produits suivants :

- $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 3 \qquad\qquad .$
- $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} \frac{4^k}{2}$

3.3.2 Notation factorielle

Définition 3.5 Soit n dans $\mathbb{N}$. On appelle **factorielle** de l'entier n le nombre noté $n!$ et défini par:

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \ldots \times n$$

avec la convention $0! = 1$.

Exemple 3.10

- $3! =$
- $7! =$
- $25! =$.

Exemple 3.11 Simplifier les expressions suivantes :

- $\dfrac{7!}{5!}$
- $\dfrac{10!}{8! \times 2!}$
- $\dfrac{n!}{(n+2)!}$.

Exercice 3.2 Exprimer à l'aide de la factorielle le produit : $U_n = \prod_{k=1}^{n}(5k)$.

Exercice 3.3 Calculer le produit : $W_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k}\right)$.

3.4 Le binôme de Newton

Définition 3.6 Soient n et p dans $\mathbb{N}$. On appelle **coefficient binomial** « p parmi n » le nombre entier naturel noté $\binom{n}{p}$ égal au nombre de sous-ensembles de E de cardinal p. En pratique, $\binom{n}{p}$ correspond au nombre de façons de choisir p objets dans un ensemble comportant n objets.

Exemple 3.12 Soit $E = \{1;2;3\}$. Les sous-ensembles à 2 éléments de E sont :

Propriété 3.5 Soient n et p dans $\mathbb{N}$.

1. si $p \leqslant n$ alors
$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}.$$
2. si $p > n$ alors
$$\binom{n}{p} = 0.$$

Démonstration. RDV au Chapitre 11. □

Exemple 3.13

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
   - $\binom{n}{0}$
   - $\binom{n}{n}$
   - $\binom{n}{1}$
2. Calculons
$$\binom{5}{2}$$

Propriété 3.6 (Symétrie des coefficients) Soit n dans $\mathbb{N}$ et $p \in [\![0;n]\!]$. Alors:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

Proposition 3.3 (Triangle de Pascal) Soient n et p dans $\mathbb{N}$. Alors:

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}.$$

<u>Remarque</u> : La formule du triangle de Pascal permet de déterminer les coefficients binomiaux de proche en proche.

n \ p	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

Théorème 3.4 (Formule du binôme de Newton) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

<u>Remarque</u> : Pour $n = 2$, on retrouve les identités remarquables que vous connaissez évidemment par coeur !

$$(a+b)^2 \quad = a^2 + 2ab + b^2 \qquad \text{et} \qquad (a-b)^2 \quad = a^2 - 2ab + b^2$$

Exercice 3.4 Soit $x \in \mathbb{R}$, développer $(1+x)^5$.

Exercice 3.5 Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.