

2. Exemples de suites réelles

2.1	Généralités sur les suites	1
2.1.1	Introduction	
2.1.2	Modes de génération d'une suite	
2.1.3	Sens de variation d'une suite	
2.1.4	Suites majorées, minorées, bornées	
2.2	Suites remarquables	6
2.2.1	Suites arithmétiques	
2.2.2	Suites géométriques	
2.2.3	Suites arithmético-géométriques	
2.2.4	Suites récurrentes linéaires d'ordre 2	

L'égalité n'est rien d'autre qu'un concept nécessaire aux mathématiques. Citez-moi une seule chose, sur cette terre, qui soit égale à une autre.

Gabriel Bréard

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux suites réelles, c'est à dire aux suites à valeurs dans \mathbb{R} . Ce chapitre est le prolongement et l'approfondissement de l'étude des suites qui a été initiée au lycée. La majeure partie du chapitre sera consacrée à l'étude de suites particulières. Nous reviendrons dans le Chapitre 7 sur des propriétés plus générales des suites.

2.1 Généralités sur les suites

2.1.1 Introduction

Intuitivement, une suite réelle est une liste (infinie) de nombres réels. Par exemple, la liste (en ordre croissant) des puissances de 2 est une suite:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...

On convient usuellement de poser $u_0 = 1$, puis $u_1 = 2$, puis $u_2 = 4$, etc.

D'autres choix sont tout à fait possibles: on peut poser $v_1 = 1$, puis $v_2 = 2$, puis $v_3 = 4$, etc.

On peut également poser $w_5 = 1$, puis $w_6 = 2$, puis $w_7 = 4$, etc.

La suite notée (u_n) est donc une fonction u de \mathbb{N} dans \mathbb{R} . De même, la suite (v_n) est une fonction v de \mathbb{N}^* dans \mathbb{R} . Enfin, la suite (w_n) est une fonction w de $\llbracket 5; +\infty \rrbracket$ dans \mathbb{R} .

Définition 2.1 • Une **suite réelle** est une application de \mathbb{N} dans \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} u &: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto u_n \end{aligned}$$

On note cette suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ou $(u_n)_{n \geq 0}$ ou encore (u_n) (ou parfois seulement u).

- u_n est appelé **terme général** d'indice n (ou de rang n).



Remarque : Parfois, les suites ne sont définies que sur une partie infinie I de \mathbb{N} . Par exemple, la suite (u_n) définie par $u_n = \sqrt{n-2}$ n'est définie que pour $n \geq 2$. On dira alors que $(u_n)_n$ est définie sur $I = \llbracket 2; +\infty \llbracket$ et on notera la suite $(u_n)_{n \geq 2}$.



Attention ! Pour une rédaction rigoureuse, on distinguera bien u_n qui est un nombre car c'est le terme de rang n de la suite et $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui est la suite elle-même. C'est la même chose que de ne pas confondre la fonction f et réel $f(x)$.

Exemple 2.1 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = n^2 - 1$.

- Le premier terme est :
- Le deuxième terme est :
- Le troisième terme est :
- Le terme de rang n est :

2.1.2 Modes de génération d'une suite

a) en définissant explicitement le terme général d'indice n :

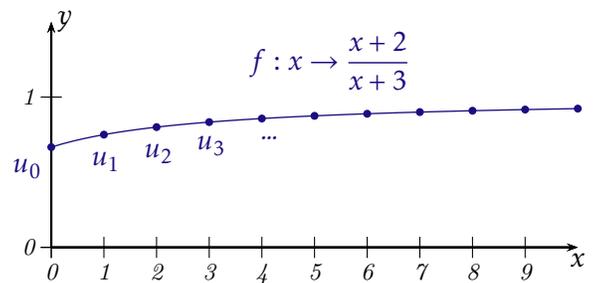
Exemple 2.2 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{n+2}{n+3}.$$

Autrement dit, on se donne l'expression d'une fonction f telle que: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = f(n)}$.

Dans l'exemple, on a : $f(x) = \frac{x+2}{x+3}$.

Remarque : On peut représenter graphiquement, comme ci-contre, les termes de la suite.



b) en définissant un terme à l'aide du terme précédent.

On dit qu'on définit la suite *par récurrence*.

Exemple 2.3 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par:
$$\begin{cases} u_0 = -10 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$$

Autrement dit, on se donne l'expression d'une fonction f définie sur un intervalle J vérifiant $f(J) \subseteq J$ telle que:

$$\begin{cases} u_0 \in J \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Dans l'exemple, on a $f(x) =$

Remarque : Pour calculer u_{1000} pour une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence, il faut donc a priori calculer tous les termes u_1, u_2, \dots, u_{999} . C'est pourquoi il sera intéressant d'obtenir une expression du terme général u_n en fonction de n dans les exercices sur les suites. 

Exemple 2.4 • Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = 2n^2 - 3n + 1$. On a :

$$u_7 =$$

• Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = -2v_n + 3 \end{cases}$$

Calculer v_4 .

c) en définissant un terme à l'aide des deux termes précédents :

Exemple 2.5 La (célèbre) suite de FIBONACCI $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par:

$$\begin{cases} F_0 = 1 & F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} & F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

Les premiers termes de la suite sont $F_0 = 1, F_1 = 1, F_2 = 2, F_3 = 3, F_4 = 5, F_5 = 8, F_6 = 13$, etc.

On parle dans ce cas de *suite récurrente d'ordre 2*.

d) la liste est loin d'être exhaustive !

2.1.3 Sens de variation d'une suite

Définition 2.2 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

- | | |
|---|---|
| 1. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite strictement croissante lorsque: | 3. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite croissante lorsque: |
| $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}.$ | $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}.$ |
| 2. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite strictement décroissante lorsque: | 4. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite décroissante lorsque: |
| $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > u_{n+1}.$ | $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}.$ |

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite **monotone** (resp. **strictement monotone**) lorsqu'elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).

Méthode 2.1 (Montrer qu'une suite est croissante ou décroissante.) Plusieurs méthodes sont possibles selon les cas.

- **Méthode 1** : Etudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$. En effet, on a :

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ croissante si et seulement si } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq 0.$$

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ décroissante si et seulement si } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \leq 0.$$

- **Méthode 2** : Lorsque tous les termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont strictement positifs, comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1. En effet, *dans ce cas*, on a :

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ croissante si et seulement si } \forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1.$$

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ décroissante si et seulement si } \forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1.$$

- **Méthode 3** : Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = f(n)$, étudier la monotonie de f sur $[0; +\infty[$.

Exemple 2.6 1. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = n^2 + 3$ est strictement croissante.

2. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier n , $u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1$ est strictement croissante :

3. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout entier n par : $u_n = \frac{2^n}{n+1}$ est strictement croissante :

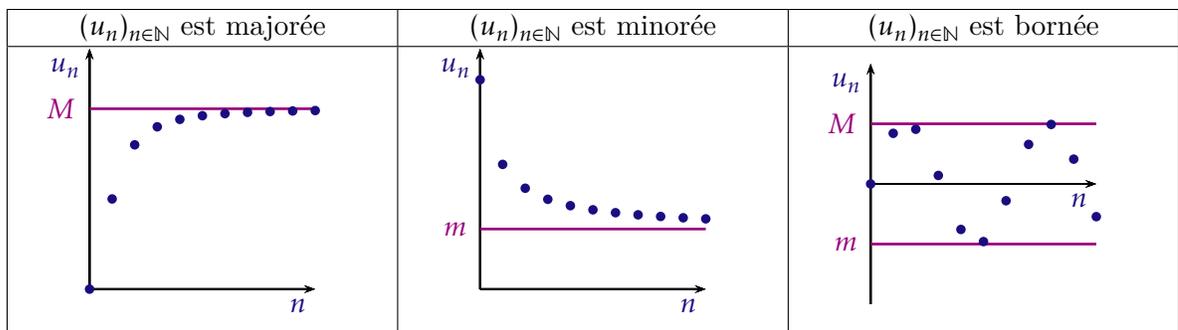
4. La suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par: $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = \frac{3}{n+1}$ est strictement décroissante :

2.1.4 Suites majorées, minorées, bornées

Définition 2.3 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une **suite majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq M$.
- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une **suite minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq m$.
- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une **suite bornée** si elle est à la fois majorée et minorée, c'est à dire s'il existe $m \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad m \leq u_n \leq M$.

Les graphiques ci-dessous illustrent ces différentes propriétés.



Exemple 2.7 La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout entier n par $u_n = \frac{3n^2}{n^2 + 1}$ est majorée par 3.

2.2 Suites remarquables

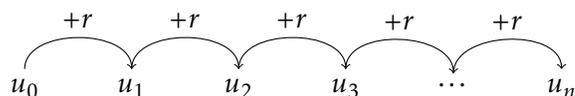
2.2.1 Suites arithmétiques

Définition 2.4 Une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une **suite arithmétique** s'il existe un réel r tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + r$$

Le réel r est appelé **raison** de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre r :



Exemple 2.8 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = -2$.

Exercice type 2.1 Les suites suivantes sont-elles arithmétiques ?

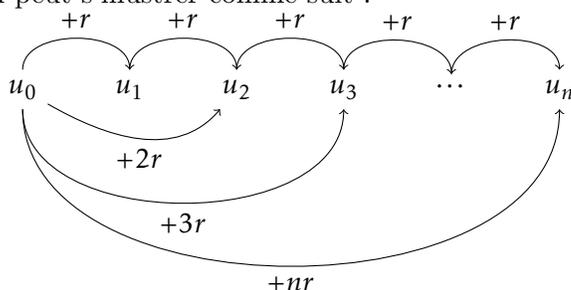
- la suite (u_n) définie par: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 3 + 5n$.

- la suite (v_n) définie par: $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = n^2 + 1$.

Proposition 2.1 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 . Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = u_0 + nr.$$

Cette proposition peut s'illustrer comme suit :



Remarque : On a également :

$$u_n = u_1 + (n-1)r, \quad u_n = u_2 + (n-2)r, \quad \dots \quad u_n = u_p + (n-p)r.$$



Proposition 2.2 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 . Notons S_n la somme des $n+1$ premiers termes consécutifs de la suite (u_n) , à savoir $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ que l'on note aussi $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Alors:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}.$$

Remarque : Il peut être plus aisé de retenir la formule suivante :

$$\text{Somme [suite arithmétique]} = \frac{\text{nombre de termes} \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}.$$



Exemple 2.9 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = -2$.

Alors: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 5 - 2n$. Calculons S_n .

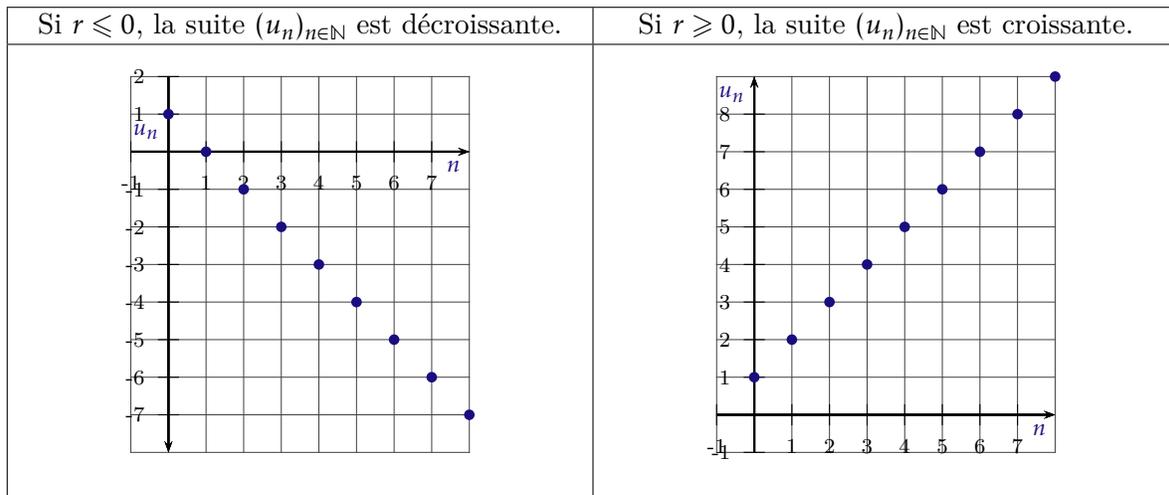
Exercice 2.1 Calculer $\sum_{k=0}^n k$. Résultat à connaître par ♥

Proposition 2.3 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r .

- Si $r > 0$ alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.
- Si $r < 0$ alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
- Si $r = 0$ alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.

Démonstration.

□



2.2.2 Suites géométriques

Définition 2.5 Une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une **suite géométrique** s'il existe un réel q tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = q \times u_n$$

Le réel q est appelé **raison** de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre q :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & \times q & \\
 & \frown & \\
 u_0 & & u_1 & & u_2 & & u_3 & & \cdots & & u_n
 \end{array}$$

Exemple 2.10 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 3$.

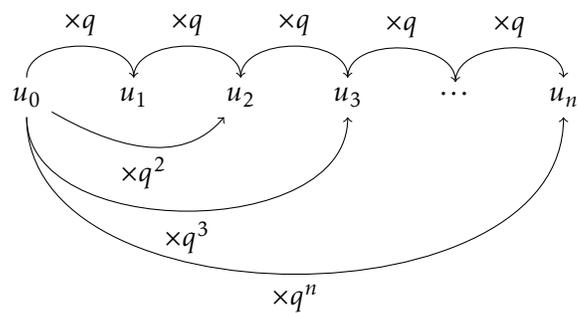
Exercice type 2.2 Les suites suivantes sont-elles géométriques ?

- (u_n) définie par: $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 4u_n + 1$.
- (v_n) définie par: $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{2 \times 3^n}{5^{n+1}}$.

Proposition 2.4 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q . Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 q^n.$$

Cette proposition peut s'illustrer comme suit :



Remarque : On a également :

$$u_n = u_1 \times q^{n-1}, \quad u_n = u_2 \times q^{n-2}, \quad \dots \quad u_n = u_p q^{n-p}.$$



Proposition 2.5 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0 . Notons S_n la somme des $n+1$ premiers termes consécutifs de la suite (u_n) , à savoir

$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ que l'on note aussi $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Alors:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$



Remarque : Il peut être plus aisé de retenir la formule suivante :

$$\text{Somme [suite géométrique]} = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nb de termes}}}{1 - \text{raison}}.$$

Exemple 2.11 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 3$.

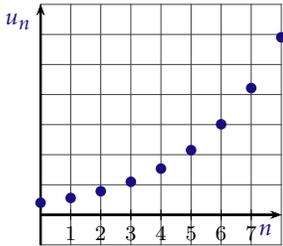
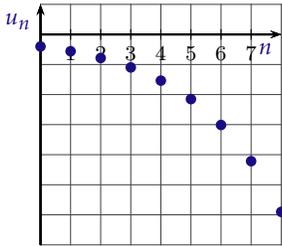
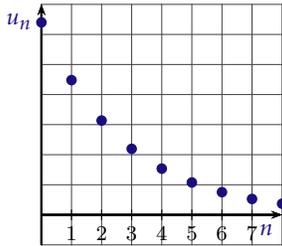
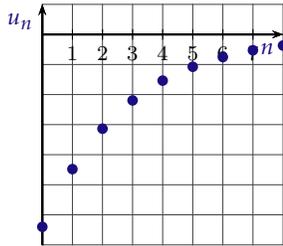
Alors: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2 \times 3^n$. Calculons S_n .

Exercice 2.2 Calculer pour $q \neq 1$, $\sum_{k=0}^n q^k$. Résultat à connaître par ♥

Proposition 2.6 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 . Alors:

- Si $0 < q < 1$ et $u_0 > 0$, la suite (u_n) est strictement décroissante. (c'est le contraire si $u_0 < 0$)
- Si $q > 1$ et $u_0 > 0$, la suite est strictement croissante. (c'est le contraire si $u_0 < 0$)
- Si $q < 0$, la suite n'est pas monotone.

Ces propriétés sont résumées par les graphiques ci-après.

Si $q > 1$		Si $0 < q < 1$	
Si $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est croissante	Si $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est décroissante	Si $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est décroissante	Si $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est croissante
			

Démonstration.

□

2.2.3 Suites arithmético-géométriques

Définition 2.6 Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite **arithmético-géométrique** s'il existe deux réels a et b tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b.$$

Remarque :

- Si $a = 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + b$.
Autrement dit, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison b .
- Si $b = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n$.
Autrement dit, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison a .
- Si $a = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = b$.
Autrement dit, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite constante égale à b .



Exemple 2.12 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4 \end{cases}$$

Alors la suite (u_n) est une suite arithmético-géométrique avec $a =$ et $b =$.

Méthode 2.2 (Trouver l'expression explicite d'une suite arithmético-géométrique) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique de la forme $u_{n+1} = au_n + b$.

Pour exprimer u_n en fonction de n , on procède selon les étapes suivantes :

1. On détermine l'unique réel α vérifiant $\alpha = a\alpha + b$ en résolvant l'équation.
2. On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $v_n = u_n - \alpha$ et on vérifie que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison a .
3. On exprime v_n en fonction de n et on en déduit l'expression de u_n en fonction de n .

Exercice type 2.3 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par:

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4. \end{cases}$$

Exprimer u_n en fonction de n .

2.2.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition 2.7 Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une **suite récurrente linéaire d'ordre 2** s'il existe a et b dans \mathbb{R} tels que:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Remarque : pour définir parfaitement une suite récurrente linéaire d'ordre 2, on complète la formule de récurrence par la donnée des deux premiers termes de la suite.



Exemple 2.13 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par:

$$\begin{cases} u_0 = 4 & u_1 = -6 \\ \forall n \in \mathbb{N} & u_{n+2} = 2u_{n+1} + \frac{5}{6}u_n \end{cases}$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Notre objectif est d'obtenir l'expression de u_n en fonction de n .

Définition 2.8 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2. On appelle **équation caractéristique** associée à la suite récurrente linéaire d'ordre 2 l'équation du second degré $r^2 = ar + b$.

Exemple 2.14 L'équation caractéristique associée à la suite précédente est

Théorème 2.1 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Notons (E) son équation caractéristique associée.

- Si (E) admet deux racines distinctes r_1 et r_2 , alors le terme général de la suite peut s'écrire sous la forme

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \lambda(r_1)^n + \mu(r_2)^n.$$

où λ et μ sont des réels déterminés à l'aide des deux premiers termes de la suite.

- Si (E) admet une racine réelle double r_0 , alors le terme général de la suite peut s'écrire sous la forme

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (\lambda + \mu n)(r_0)^n.$$

où λ et μ sont des réels déterminés à l'aide des deux premiers termes de la suite.

- Le cas où (E) n'admet pas de racines réelles est hors programme.

Exercice type 2.4 Déterminer une expression du terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par:

$$\begin{cases} u_0 = 1 & u_1 = 5, \\ \forall n \in \mathbb{N} & u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n. \end{cases}$$